



Centro de Investigación en Matemáticas A.C.

Variedades de Prym de n cubrientes

TESIS

que para obtener el grado de

Doctor en Ciencias

con orientación en

Matemáticas Básicas

PRESENTA:

María del Rosario Soler Zapata

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Armando A. Sánchez Argáez

Dr. Sevín Recillas Pishmish

Julio 2006

Guanajuato, Gto. México

ÍNDICE.

1. <i>Introducción</i>	2
2. <i>Antecedentes</i>	5
2.1 Variedades abelianas.	5
2.2 Toro dual complejo.	5
2.3 La Jacobiana de una curva.	6
2.4 Subvariedades abelianas complementarias y endomorfismos norma.	7
2.5 Variedades de Prym Clásicas.	10
2.6 Variedad de Prym de un par de cubrientes.	12
2.6.1 Definición de $P(f_1, f_2)$	13
2.6.2 La dimensión de $P(f_1, f_2)$	16
2.6.3 Restricción de la polarización canónica a $P(f_1, f_2)$	17
3. <i>La variedad $P(l_1, l_2, l_3)$</i>	20
3.1 Definición de $P(l_1, l_2, l_3)$	20
3.2 La polarización de $P(l_1, l_2)$	22
3.3 La polarización de $P(l_1, l_2, l_3)$	24
4. <i>La variedad $P(l_1, \dots, l_n)$</i>	28
4.1 Definición de $P(l_1, \dots, l_n)$	28
4.2 La polarización de $P(l_1, \dots, l_n)$	30
5. <i>Variedad de Prym de 3 cubrientes</i>	34
5.1 Definición de P_{123}	34
5.2 La dimensión de P_{123}	36
5.3 El orden de $K(L_{P_{123}})$	37
6. <i>Variedad de Prym de n cubrientes</i>	41
6.1 Definición de $P_{1\dots n}$	41
6.1.1 $P_{1\dots n}$ está bien definida.	46
6.2 Teorema de descomposición de $J(X_{1\dots n})$	46
6.3 Dimensión de $P_{1\dots n}$	47
6.4 El orden de $K(L_{P_{1\dots n}})$	50

1. INTRODUCCIÓN

Dada una curva suave proyectiva C existe una manera natural de asociarle una variedad abeliana principalmente polarizada, su jacobiana, la cual será denotada por $J(C)$, éste es el Teorema de Torelli [4], el cual nos da una aplicación inyectiva

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_g &\hookrightarrow \mathcal{A}_g \\ C &\longmapsto (J(C), \Theta) \end{aligned}$$

entre el moduli de curvas de género g y el moduli de variedades abelianas principalmente polarizadas de dimensión g .

Definición 1.0.1: *Una variedad abeliana principalmente polarizada (X, Θ_X) es llamada variedad de Prym – Tyurin si existe una curva suave proyectiva C con Jacobiana $(J(C), \Theta)$, tal que X es una subvariedad abeliana de $J(C)$ con $i_X^* \Theta \equiv e\Theta_X$ para algún entero $e \geq 1$, donde $i_X : X \hookrightarrow J(C)$ es la inclusión canónica. Al entero e se le llama exponente de la variedad X .*

Es natural pensar que toda variedad abeliana principalmente polarizada es una variedad de Prym-Tyurin de cierto exponente, en efecto, el criterio de Welters [10] nos garantiza que toda variedad abeliana principalmente polarizada de dimensión g es una variedad de Prym-Tyurin de exponente $3^{(g-1)}(g-1)!$

Observemos que para $g = 2, 3$ se tiene que toda variedad abeliana principalmente polarizada es una Prym-Tyurin de exponente $e = 3, 18$, sin embargo, como $\dim \mathcal{M}_g = 3g - 3$ y $\dim \mathcal{A}_g = \frac{1}{2}g(g+1)$, por el teorema de Torelli, para $g = 2, 3$ se sigue que $\dim \mathcal{M}_g = \dim \mathcal{A}_g$, por lo tanto la variedad abeliana general es una jacobiana, es decir una variedad de Prym-Tyurin de exponente 1, el cual es menor que 3 y 18 que son los exponentes dados por el criterio de Welters.

Considere el conjunto:

$$\mathcal{R}_g = \{\tilde{X} \xrightarrow{\pi} X \mid \pi \text{ es étale de grado } 2\}.$$

Wirtinger y Mumford mostraron que hay una aplicación natural

$$\mathcal{R}_{g+1} \rightarrow \mathcal{A}_g$$

que asocia a un cubriente étale de grado 2 de curvas suaves proyectivas de género $g+1$ una variedad abeliana principalmente polarizada de dimensión g , la variedad de Prym del cubriente.

Como $\dim \mathcal{R}_g = \dim \mathcal{M}_g = 3g - 3$, para $g = 4, 5$ se tiene que las aplicaciones $\mathcal{R}_5 \rightarrow \mathcal{A}_4$ y $\mathcal{R}_6 \rightarrow \mathcal{A}_5$ son dominantes, esto es, toda variedad abeliana de dimensión 4 y 5 es una variedad de Prym-Tyurin de exponente 2, dicho exponente es nuevamente mucho menor que el dado por el criterio de Welters (162 y 1944 respectivamente). Surge entonces una pregunta natural: ¿Cuál es el exponente mínimo con el que una variedad abeliana principalmente polarizada es una Prym-Tyurin?

Para responder esta pregunta es necesario obtener nuevas variedades de Prym-Tyurin por ello estudiamos las variedades de Prym Clásicas y las variedades de Prym de pares de cubrientes estudiadas por H. Lange and S. Recillas [8] [7] con el propósito de generalizar estas ideas. En esta tesis estudiamos el siguiente diagrama conmutativo de morfismos finitos de curvas suaves proyectivas tales que

g_i, g_j no factorizan vía un mismo morfismo $Y' \rightarrow Y$

$$\begin{array}{ccccc}
 & & X_{123} & & \\
 & h_{12}^3 \swarrow & \downarrow h_{13}^2 & \searrow h_{23}^1 & \\
 X_{12} & & X_{13} & & X_{23} \\
 h_1^2 \downarrow & h_2^1 \swarrow & h_1^3 \swarrow & h_3^1 \swarrow & h_3^2 \downarrow \\
 X_1 & & X_2 & & X_3 \\
 & g_1 \swarrow & \downarrow g_2 & \searrow g_3 & \\
 & & Y & &
 \end{array} \tag{1.1}$$

donde

$$X_{12} = X_1 \times_Y X_2, \quad X_{23} = X_2 \times_Y X_3, \quad X_{13} = X_1 \times_Y X_3 \quad \text{y}$$

$$X_{123} \approx X_{12} \times_{X_2} X_{23} \approx X_{12} \times_{X_1} X_{13} \approx X_{23} \times_{X_3} X_{13}.$$

Dado el diagrama anterior, de ahora en adelante $d_i \geq 2$, $g_x \geq 1$ y ω_{g_i} denotan el grado de g_i , el género de X y el grado de ramificación del divisor de g_i respectivamente, donde $i = 1, 2, 3$.

En el capítulo 3 definimos la variedad $P(l_1, l_2, l_3)$, calculamos su dimensión y el tipo de la polarización inducida por la polarización principal de $J(X_{123})$, dicha variedad es una subvariedad abeliana asociada al diagrama (1.1) que se descompone en subvariedades mas pequeñas, por lo que no es una candidata apropiada para ser la variedad de Prym del diagrama, o lo que para nosotros significará lo mismo, la variedad de Prym de 3 cubrientes. Esta descomposición está dada al final de 5.1, en el cual damos la definición de la variedad de Prym de 3 cubrientes, denotada por P_{123} así como también una definición equivalente dada en la Proposición 5.1.2 la cual nos dice que

$$P_{123} =_i (P(h_{23}^1) \cap P(h_{13}^2) \cap P(h_{12}^3))^0.$$

donde $=_i$ significa “isógeno a” y la isogenia es la inducida por la aplicación suma.

Esta definición nos da una descomposición de $J(X_{123})$ en 8 subvariedades (Proposición 5.1.1), es decir

$$J(X_{123}) =_i l^* J(Y) + l_1^* P(g_1) + l_2^* P(g_2) + l_3^* P(g_3) + (h_{12}^3)^* P_{12} + (h_{23}^1)^* P_{23} + (h_{13}^2)^* P_{13} + P_{123}$$

La dimensión de P_{123} es calculada en la sección 2 de este capítulo, donde se prueba que si el lugar de ramificación de g_i y g_j son disjuntos entonces

$$\begin{aligned}
 \dim P_{123} = & (d_1 - 1)(d_2 - 1)(d_3 - 1)(g_Y - 1) + \frac{1}{2}((d_1 - 1)(d_2 - 1)\omega_{g_3} \\
 & + (d_1 - 1)(d_3 - 1)\omega_{g_2} + (d_2 - 1)(d_3 - 1)\omega_{g_1}). \tag{1.2}
 \end{aligned}$$

Con el propósito de dar condiciones para obtener variedades de Prym-Tyurin un primer paso es calcular el orden del grupo $K(L_{P_{123}})$, el cual es el kernel de la aplicación

$$\phi_{L_{P_{123}}} : J(X_{123}) \rightarrow \widehat{J(X_{123})}$$

donde $L_{P_{123}}$ es la restricción de la polarización canónica principal L de $J(X_{123})$. Este cálculo está hecho en la sección 5.3 donde se demuestra el siguiente

Teorema 1.0.1: *Bajo las condiciones del diagrama (1.1), si el m.c.d.(d_i, d_j) = 1 para $i, j \in \{1, 2, 3\}$ y $g_Y = 0$ entonces*

$$1. |K(L_{P(h_{jk}^i, h_{ik}^j)})| = d_i^{2(g_{X_{jk}} - g_{X_k})} d_j^{2(g_{X_{ik}} - g_{X_k})}.$$

$$2. |K(L_{P_{123}})| = d_1^{2(g_{X_{23}} - g_{X_2} - g_{X_3})} d_2^{2(g_{X_{13}} - g_{X_1} - g_{X_3})} d_3^{2(g_{X_{12}} - g_{X_1} - g_{X_2})}.$$

En el capítulo 4 se generalizan los resultados dados en el capítulo 3 y nuevamente se obtiene que la variedad $P(l_1, \dots, l_n)$ se descompone en subvariedades más pequeñas. En el capítulo 6 además de generalizar los resultados del capítulo 5, dado el diagrama (6.1) calculamos el orden del grupo $K(L_{P_{1\dots n}})$ para $g_Y \geq 0$ y $n \geq 2$ y finalmente damos condiciones necesarias y suficientes para que $P_{1\dots n}$ sea variedad de Prym-Tyurin.

2. ANTECEDENTES

En ésta sección daremos una serie de definiciones y resultados acerca de las variedades abelianas, variedades de Prym y variedades de Prym de pares de cubiertas.

2.1 Variedades abelianas.

Definición 2.1.1: Sea $X = V/\Lambda$ un toro complejo de dimensión g . Una polarización en X es la primera clase de Chern $c_1(L)$ de un haz lineal definido positivo sobre X , esto es, una forma hermitiana $H : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ positiva definida tal que $\text{Im}H(\Lambda, \Lambda) \subseteq \mathbb{Z}$.

Sea $E = \text{Im}(H)$, hay una base $\lambda_1, \dots, \lambda_g, \mu_1, \dots, \mu_g$ de Λ , respecto a la cual, E esta dada por la matriz $\begin{pmatrix} 0 & \Delta \\ -\Delta & 0 \end{pmatrix}$ donde $\Delta = \text{diag}(d_1, \dots, d_g)$, $d_i \geq 0$ y $d_i \mid d_{i+1}$ $i = 1, \dots, g$

Definición 2.1.2: El vector $\mathbf{t} = (d_1, \dots, d_g)$ se denomina el tipo de la polarización.

Definición 2.1.3: Una polarización es llamada principal si es de tipo $\mathbf{t} = (1, \dots, 1)$.

Definición 2.1.4: Una variedad abeliana es un toro complejo que admite una polarización. El par (X, H) se llama variedad abeliana polarizada. Si H (o L) es de tipo $\mathbf{t} = (1, \dots, 1)$ decimos que (X, H) es una variedad abeliana principalmente polarizada.

2.2 Toro dual complejo.

Sea $X = V/\Lambda$ un toro complejo de dimensión g . Considere el \mathbb{C} -espacio vectorial $\widehat{V} = \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C})$ de formas \mathbb{C} -antilineales $l : V \rightarrow \mathbb{C}$. El espacio vectorial real subyacente de \widehat{V} es canónicamente isomorfo a $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{R})$. El isomorfismo está dado por $l \mapsto \text{Im } l$ con aplicación inversa $k \mapsto l(v) = -k(iv) + ik(v)$. Esto implica que la forma \mathbb{R} -bilineal

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \widehat{V} \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad \langle l, v \rangle = \text{Im}l(v)$$

es no degenerada. Esto implica que $\widehat{\Lambda} := \{l \in \widehat{V} \mid \langle l, \Lambda \rangle \subseteq \mathbb{Z}\}$ es una latiz en \widehat{V} llamada la latiz dual de Λ .

Definición 2.2.1: El cociente $\widehat{X} := \widehat{V}/\widehat{\Lambda}$ es un toro complejo de dimensión g denominado toro dual de X .

Proposición 2.2.1: El homomorfismo canónico $\widehat{V} \rightarrow \text{Hom}(\Lambda, U(1))$, $l \mapsto e(2\pi i \langle l, \cdot \rangle)$ induce un isomorfismo $\widehat{X} \xrightarrow{\sim} \text{Pic}^0(X)$ (Ver Prop.4.1 en [4]).

De acuerdo con la Proposición 2.2.1 el grupo $\text{Pic}^0(X)$ admite la estructura de toro complejo de manera natural. De ahora en adelante, identificaremos $\text{Pic}^0(X)$ y \widehat{X} . Sean $X_i = V_i/\Lambda_i$ toros complejos, $i = 1, 2$ y $f : X_1 \rightarrow X_2$ un homomorfismo con representación analítica $F : V_1 \rightarrow V_2$. El homomorfismo dual $F^* : \widehat{V}_2 \rightarrow \widehat{V}_1$, que asocia a la forma antilineal $l_2 \in \widehat{V}_2$, la forma antilineal

$l_2 \circ F \in \widehat{V}_1$, induce un homomorfismo $\widehat{f} : \widehat{X}_2 \rightarrow \widehat{X}_1$ ya que $F^*\widehat{\Lambda}_2 \subseteq \widehat{\Lambda}_1$. Por la Proposición 2.2.1, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \widehat{X}_2 & \xrightarrow{\sim} & Pic^0(X_2) \\ \widehat{f} \downarrow & & \downarrow f^* \\ \widehat{X}_1 & \xrightarrow{\sim} & Pic^0(X_1) \end{array} \quad (2.1)$$

Definición 2.2.2: Una isogenia $f : X_1 \rightarrow X_2$ de toros complejos, es un homomorfismo suprayectivo de núcleo finito.

Proposición 2.2.2: Si $f : X_1 \rightarrow X_2$ es una isogenia de toros complejos, el morfismo dual $\widehat{f} : \widehat{X}_2 \rightarrow \widehat{X}_1$ es también una isogenia y su núcleo es isomorfo a $Hom(ker f, U(1))$. En particular $deg \widehat{f} = deg f$.

Demostración: Supongamos que $X_1 = V/\Lambda_1$, y $X_2 = V/\Lambda_2$. Suponemos que id_V es la representación analítica de f . Por definición $F^* = id_{\widehat{V}}$ es la representación analítica de $\widehat{f} : \widehat{X}_2 \rightarrow \widehat{X}_1$, por lo que \widehat{f} es una isogenia.

Por el diagrama (1) y el teorema de Apell-Humbert, se tiene lo siguiente:

$$\begin{array}{ccccc} \widehat{X}_2 & \xrightarrow{\sim} & Pic^0(X_2) & \xrightarrow{\sim} & Hom(\Lambda_2, U(1)) \\ \widehat{f} \downarrow & & \downarrow f^* & & \downarrow \\ \widehat{X}_1 & \xrightarrow{\sim} & Pic^0(X_1) & \xrightarrow{\sim} & Hom(\Lambda_1, U(1)) \end{array}$$

Por lo que

$$\begin{aligned} Ker(\widehat{f}) &\simeq Ker(Hom(\Lambda_2, U(1)) \rightarrow Hom(\Lambda_1, U(1))) \\ &\simeq Hom(\Lambda_2/\Lambda_1, U(1)) \simeq Hom(Ker(f), U(1)) \end{aligned}$$

■

Sea L un haz lineal sobre X . Para $x \in X$ el haz lineal $t_x^*L \otimes L^{-1}$ tiene primera clase de Chern cero. Identificando $\widehat{X} = Pic^0(X)$ tenemos la aplicación

$$\begin{aligned} \phi_L : X &\rightarrow \widehat{X} \\ x &\mapsto t_x^*L \otimes L^{-1} \end{aligned}$$

que es un homomorfismo (Teorema del cuadrado) y además será de vital importancia en el desarrollo de la tesis.

EL ejemplo más estudiado de variedad abeliana está dado en la siguiente sección.

2.3 La Jacobiana de una curva.

Sea C una curva de género g (curva= curva proyectiva, irreducible, no singular definida sobre \mathbb{C} , o equivalentemente, una superficie de Riemann compacta). Sea $H^0(C, \omega_C)$ el \mathbb{C} -espacio vectorial de dimensión g de 1-formas holomorfas sobre C . El grupo de homología $H_1(C, \mathbb{Z})$ es un grupo abeliano libre de rango $2g$. Por el teorema de Stokes cada elemento $\gamma \in H_1(C, \mathbb{Z})$ produce una aplicación (a la que también le llamaremos γ) $\gamma : H^0(C, \omega_C) \rightarrow \mathbb{C}$, $\omega \mapsto \int_\gamma \omega$.

Lema 2.3.1: *La aplicación canónica $H_1(C, \mathbb{Z}) \rightarrow H^0(C, \omega_C)^* = \text{Hom}(H^0(C, \omega_C), \mathbb{C})$ es inyectiva.*

Se sigue que $H_1(C, \mathbb{Z})$ es una latiz en $H^0(C, \omega_C)^*$ y el cociente

$$JC := H^0(C, \omega_C)^*/H_1(C, \mathbb{Z})$$

es un toro complejo de dimensión g , llamado la *Variedad Jacobiana*, o simplemente, la *Jacobiana* de C .

Si $A = \{\alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g\}$ es una base de $H_1(C, \mathbb{Z})$ tal que $\alpha_i \cdot \beta_j = \delta_j^i$ y $\alpha_i \cdot \alpha_j = 0, \beta_i \cdot \beta_j = 0$ para $i \neq j$, esto es, en la base A , la matriz de intersección está dada por $M = \begin{pmatrix} 0 & -I_g \\ I_g & 0 \end{pmatrix}$. Con esta base JC tiene una polarización principal. En efecto, denotemos por E a la forma alternante en $H^0(C, \omega_C)^*$ con matriz $-M$ respecto a la base A de $H^0(C, \omega_C)^*$ considerada como un \mathbb{R} -espacio vectorial, la aplicación :

$$H : H^0(C, \omega_C)^* \times H^0(C, \omega_C)^* \rightarrow \mathbb{C}$$

dada por $H(u, v) = E(iu, v) + iE(u, v)$ define una polarización principal, llamada la polarización canónica, en JC . Hay otra manera de definir la Variedad Jacobiana de C mediante el grupo $\text{Pic}^0(C)$ de haces lineales de grado cero sobre C . El Teorema de Abel-Jacobi nos dice que hay un isomorfismo entre $\text{Pic}^0(C)$ y JC . Vía este isomorfismo, $\text{Pic}^0(C)$ adquiere estructura de Variedad principalmente polarizada. En lo sucesivo, identificamos $JC = \text{Pic}^0(C)$ vía el isomorfismo canónico.

Definición 2.3.1: *Un divisor Θ en JC tal que $\mathcal{O}_{JC}(\Theta)$ representa la polarización canónica le llamaremos divisor theta.*

2.4 Subvariedades abelianas complementarias y endomorfismos norma.

Dada una variedad abeliana principalmente polarizada ($X = V/\Lambda, \Theta$), una subvariedad abeliana $Y \subset X$ ($Y = W/\Lambda \cap W$, donde $W \subset V$ es un \mathbb{C} -subespacio vectorial de V) e $i : Y \hookrightarrow X$ la inclusión canónica, se tiene el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{i} & X \\ \phi_{i^*\Theta} \downarrow & & \downarrow \phi_\Theta \\ \widehat{Y} & \xleftarrow{\widehat{i}} & \widehat{X} \end{array}$$

El exponente $e(i^*\Theta)$ del grupo finito $K(i^*\Theta) = \ker \phi_{i^*\Theta}$ (el entero positivo e más pequeño tal que $nx = 0$ para todo $x \in \ker \phi_{i^*\Theta}$), se llama exponente de la polarización $i^*\Theta$ en Y . De acuerdo con la proposición 1.2.6 en [4] existe una única isogenia $\psi_{i^*\Theta} : \widehat{Y} \rightarrow Y$ tal que $\phi_{i^*\Theta} \circ \psi_{i^*\Theta} = e(i^*\Theta)_{\widehat{Y}}$ y $\psi_{i^*\Theta} \circ \phi_{i^*\Theta} = e(i^*\Theta)_Y$ donde $e(i^*\Theta)_{\widehat{Y}}$ y $e(i^*\Theta)_Y$ son las multiplicaciones por $e(i^*\Theta)$ en \widehat{Y} y Y respectivamente.

Definición 2.4.1: *Se define:*

1. *El exponente de la subvariedad abeliana Y como el exponente $e(i^*\Theta)$ de la polarización inducida en Y y escribimos $e(Y) = e(i^*\Theta)$*
2. *El endomorfismo norma de X asociado a Y como $N_Y = i \circ \psi_{i^*\Theta} \circ \widehat{i} \circ \phi_\Theta$*

El nombre de endomorfismo norma viene de la generalización de la teoría de variedades jacobianas, de hecho, es una generalización de la noción usual de un endomorfismo norma asociado a un cubriente de curvas algebraicas.

Para Y subvariedad abeliana de X se cumple que $N'_Y = N_Y$ y $N_Y^2 = e(Y)$, aquí $'$ denota la involución de Rosati con respecto a la polarización Θ , esto es $N'_Y = \phi_\Theta^{-1} \circ \widehat{N}_Y \circ \phi_\Theta$. Estas

condiciones caracterizan endomorfismos norma, para ello notemos que dado el endomorfismo norma N_Y construimos el elemento

$$\varepsilon_Y := \frac{1}{e(Y)} N_Y$$

de $\text{End}_{\mathbb{Q}}(X)$ el cual satisface $\varepsilon_Y = \varepsilon'_Y$ y $\varepsilon_Y^2 = \varepsilon_Y$; en otra palabras, dada la polarización Θ en X , asociamos a una subvariedad abeliana Y de X un idempotente simétrico $\varepsilon_Y \in \text{End}_{\mathbb{Q}}(X)$. Inversamente, si ε es un idempotente simétrico en $\text{End}_{\mathbb{Q}}(X)$, existe $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $n\varepsilon \in \text{End}(X)$ por lo que se define X^ε como la imagen de $n\varepsilon$. Esta definición no depende de la elección de n , por lo tanto, a cada idempotente simétrico ε le asociamos una subvariedad abeliana X^ε de X .

Teorema 2.4.1: *Las asignaciones $\varphi : Y \mapsto \varepsilon_Y$ y $\xi : \varepsilon \mapsto X^\varepsilon$ son inversa una de la otra y da una biyección entre el conjunto de subvariedades abelianas de X y el conjunto de idempotentes simétricos de $\text{End}_{\mathbb{Q}}(X)$.*

La demostración podemos consultarla en [4].

Observemos ahora que el conjunto de idempotentes simétricos en $\text{End}_{\mathbb{Q}}(X)$ admite una involución canónica ($\varepsilon \mapsto 1 - \varepsilon$); la polarización Θ de X induce una involución canónica sobre el conjunto de subvariedades abelianas de X tal que a una subvariedad abeliana Y de X se le asocia la subvariedad abeliana $Z := X^{1-\varepsilon_Y}$ de dimensión complementaria, es decir $\dim Y + \dim Z = \dim X$.

Definición 2.4.2: *Z se llama la subvariedad abeliana complementaria de Y en X con respecto a la polarización Θ de X .*

Obviamente Y es la subvariedad abeliana complementaria de Z por lo que tiene sentido llamar par de subvariedades abelianas complementarias respecto a la polarización Θ de X a (Y, Z) .

En general los exponentes $e(Y)$ de Y y $e(Z)$ de Z son diferentes, sin embargo, si Θ es una polarización principal se tiene que $e(Y) = e(Z)$.

Proposición 2.4.1: *N_Y y N_Z satisfacen las siguientes propiedades:*

1. $N_Y|_Y = e(Y)1_Y$
2. $N_Y|_Z = 0$
3. $N_Y N_Z = 0$
4. $e(Y)N_Z + e(Z)N_Y = e(Z)e(Y)1_X$

Ver demostración en [4].

Con lo anterior es fácil ver que $Z = (\ker(N_Y))^0$, donde 0 denota la componente conexa que contiene al origen.

Teorema 2.4.2 (Reducibilidad de Poincaré): *Sean (X, Θ) una variedad abeliana polarizada y (Y, Z) un par de subvariedades abelianas complementarias, entonces la aplicación $(N_Y, N_Z) : X \rightarrow Y \times Z$ que a $x \in X$ le asocia $(N_Y(x), N_Z(x)) \in Y \times Z$ es una isogenia.*

Demostración: De 4 en la proposición 2.4.1 se tiene que $\ker((N_Y, N_Z)) \subset X[e(Y)e(Z)]$, de donde es inmediato que $\ker((N_Y, N_Z))$ es finito. Sea $(y, z) \in Y \times Z$, como N_Y, N_Z y $e(Y)e(Z) : X \rightarrow X$ dada por $x \mapsto e(Y)e(Z)x$ son suprayectivas, existen $x_1, x_2 \in X$ tales que

$$\begin{aligned} y &= N_Y(e(Y)e(Z)x_1) \\ z &= N_Z(e(Y)e(Z)x_2) \end{aligned}$$

Sea $x = e(Z)N_Y(x_1) + e(Y)N_Z(x_2)$, entonces

$$\begin{aligned}
(N_Y, N_Z)(x) &= (N_Y(e(Z)N_Y(x_1) + e(Y)N_Z(x_2)), N_Y(e(Z)N_Y(x_1) + e(Y)N_Z(x_2))) \\
&= (e(Z)N_Y^2(x_1), N_Z^2(e(Y)x_2)) \\
&= (e(Y)e(Z)N_Y(x_1), e(Y)e(Z)N_Z(x_2)) \\
&= (y, z)
\end{aligned}$$

■

Consideremos las aplicaciones:

$$\begin{aligned}
\varphi: Y \times Z &\rightarrow Y \times Z, & (y, z) &\mapsto (e(Z)y, e(Y)z) \\
\sigma: Y \times Z &\rightarrow X, & (y, z) &\mapsto y + z
\end{aligned}$$

Corolario 2.4.1: *La aplicación suma $\sigma: Y \times Z \rightarrow X$ es una isogenia.*

Demostración: Tenemos que probar que σ es subyectiva y de kernel finito.

1. σ es suprayectiva.

Como $(\sigma \circ \varphi) \circ (N_Y, N_Z) = (N_Y, N_Z) \circ (\sigma \circ \varphi) = e(Y)e(Z)1_X$ y (N_Y, N_Z) es isogenia, la proposición 1.2.6 de [4] implica que $\sigma \circ \varphi$ es isogenia y por lo tanto σ es sobre.

2. $\ker(\sigma)$ es finito. Como

$$\begin{aligned}
\dim(\ker(\sigma)) &= \dim(Y \times Z) - \dim(\text{Im}(\sigma)) \\
&= \dim(\text{Im}((N_Y, N_Z))) - \dim(X) && ((N_Y, N_Z) \text{ es suprayectiva}) \\
&= \dim(X) - \dim(\ker(N_Y, N_Z)) - \dim(X) \\
&= 0 && (\ker(N_Y, N_Z) \text{ es finito})
\end{aligned}$$

■

La siguiente proposición nos dice como se relacionan los tipos de las polarizaciones inducidas por Θ en un par de subvariedades abelianas complementarias.

Proposición 2.4.2: *Sean (Y, Z) un par de subvariedades abelianas complementarias de una variedad abeliana principalmente polarizada (X, Θ) con $\dim(Y) \geq \dim(Z) = r$. Si j es la inclusión de Z en X y la polarización inducida $j^*(\Theta)$ es de tipo (d_1, \dots, d_r) entonces, para la inclusión i de Y en X , $i^*(\Theta)$ es de tipo $(\underbrace{1, \dots, 1}_{\dim Y - r}, d_1, \dots, d_r)$ (Corolario 12.1.5 [4]).*

Tyurin continuó con la idea de Wirtinger y Mumford de asociar a una curva una variedad abeliana principalmente polarizada y demostró que, dada una curva C y una correspondencia efectiva σ de la curva le podemos asociar una subvariedad abeliana de $J(C)$ que satisfaga la ecuación

$$\sigma^2 + (m-2)\sigma - (m-1) = 0$$

para algún entero positivo m . Sin embargo no en todos los casos se obtiene que dicha subvariedad sea principalmente polarizada. Kanev estudio el problema y demostró que si la correspondencia σ es simétrica y sin puntos fijos la subvariedad asociada a la curva es principalmente polarizada [2] [3]. Estas variedades fueron llamadas *variedades de Prym-Tyurin*.

Posteriormente se estudiaron los morfismos entre curvas suaves proyectivas y se definió la variedad de Prym del morfismo, a saber, dadas C y \tilde{C} curvas suaves proyectivas de género $g_C, g_{\tilde{C}} \geq 1$ y $f: \tilde{C} \rightarrow C$ un morfismo entre ellas, si la subvariedad abeliana complementaria P de $f^*J(C)$ en $J(\tilde{C})$ es una variedad de Prym-Tyurin decimos que P es la *variedad de Prym asociada al cubriente*. Mumford estudió la variedad de Prym asociada al cubriente y demostró que hay exactamente 3 tipos de cubrientes tales que P es una variedad de Prym-Tyurin, estas variedades se conocen con el nombre de variedades de Prym Clásicas.

En general decimos que la subvariedad abeliana complementaria de $f^*J(C)$ en $J(\tilde{C})$ es la variedad de Prym de f y se denota por $P(f)$.

2.5 Variedades de Prym Clásicas.

La construcción siguiente es una recapitulación de [9] y [4].

Sea $\tilde{C} \xrightarrow{\pi} C$ un morfismo de grado n de curvas suaves proyectivas; podemos identificar $J(C)$ con $Pic^0(C)$ y $J(\tilde{C})$ con $Pic^0(\tilde{C})$ [4] y definir las siguientes aplicaciones :

$$\begin{array}{lll} \tau : C \longrightarrow J(C) & \text{dada por} & x \longmapsto \omega_C(x - x_0) \\ \tilde{\tau} : \tilde{C} \longrightarrow J(\tilde{C}) & \text{dada por} & \tilde{x} \longmapsto \omega_{\tilde{C}}(\tilde{x} - \tilde{x}_0) \end{array}$$

donde $x_0 \in C$ y $\tilde{x}_0 \in \tilde{C}$ son tales que $\pi(\tilde{x}_0) = x_0$.

Definición 2.5.1: Definimos la aplicación norma $Nm : J(\tilde{C}) \longrightarrow J(C)$ como la inducida por la aplicación $D \longmapsto \pi(D)$ (D es un divisor en \tilde{C}) sobre las clases de divisores.

Observemos que al aplicar el funtor Pic^0 al diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{C} & \xrightarrow{\tilde{\tau}} & J(\tilde{C}) \\ \pi \downarrow & & \downarrow Nm \\ C & \xrightarrow{\tau} & J(C) \end{array}$$

se tiene el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} J(\tilde{C}) & \xleftarrow{\tilde{\tau}^*} & Pic^0(J(\tilde{C})) \\ \pi^* \uparrow & & \uparrow Nm^* \\ J(C) & \xleftarrow{\tau^*} & Pic^0(J(C)) \end{array} \quad (2.2)$$

La conmutatividad del diagrama (2.1) nos dice que trabajar con el diagrama (2.2) equivale a estudiar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} J(\tilde{C}) & \xleftarrow{\tilde{\tau}^*} & \widehat{J(\tilde{C})} \\ \pi^* \uparrow & & \uparrow \widehat{Nm} \\ J(C) & \xleftarrow{\tau^*} & \widehat{J(C)} \end{array} \quad (2.3)$$

Los morfismos τ^* y $\tilde{\tau}^*$ son isomorfismos, en efecto, si $\Theta \subset J(C)$ y $\tilde{\Theta} \subset J(\tilde{C})$ son los divisores theta de $J(C)$ y $J(\tilde{C})$ respectivamente, entonces

$$\begin{aligned} (\tau^*)^{-1} &= -\phi_{\Theta} \\ (\tilde{\tau}^*)^{-1} &= -\phi_{\tilde{\Theta}} \end{aligned} \tag{2.4}$$

donde, para D divisor sobre una variedad abeliana X , $\phi_D : X \rightarrow \widehat{X}$ es la aplicación que a $x \in X$ le asocia $t_x^{-1}(D) - (D) \in \widehat{X}$; por lo tanto, podemos identificar, en lo sucesivo, $J(C)$ con $\widehat{J(C)}$.

Proposición 2.5.1: *Las aplicaciones $\pi^* : J(C) \rightarrow J(\tilde{C})$ y $Nm : J(\tilde{C}) \rightarrow J(C)$ que relacionan las variedades abelianas principalmente polarizadas $(J(C), \Theta)$ y $(J(\tilde{C}), \tilde{\Theta})$ tienen las siguientes propiedades:*

1. π^* y Nm son duales una de la otra, esto es

$$\begin{aligned} \widehat{Nm} &= \phi_{\tilde{\Theta}} \circ \pi^* \circ \phi_{\Theta}^{-1} \\ \widehat{\pi^*} &= \phi_{\Theta} \circ Nm \circ \phi_{\tilde{\Theta}}^{-1} \end{aligned}$$

2. $Nm \circ \pi^* = n_{J(C)}$ donde $n_{J(C)}$ es la multiplicación por n en $J(C)$.

Demostración: Las propiedades en 1 se siguen del diagrama (2.3) y las ecuaciones en (2.4). Sea D un divisor de grado cero sobre C y α el punto que le corresponde en $J(C)$, entonces $\pi^{-1}(D)$ representa a $\pi^*(\alpha) \in J(\tilde{C})$, lo cual implica que $\pi(\pi^{-1}(D))$ representa a $Nm(\pi^*(\alpha)) \in J(C)$. Como $\pi(\pi^{-1}(D)) = nD$ se concluye lo esperado. ■

Lema 2.5.1: *Si $\pi^* : J(C) \rightarrow J(\tilde{C})$ es un homomorfismo de grado n , entonces $(\pi^*)^*\tilde{\Theta} \equiv n\Theta$ (equivalencia numérica u homológica).*

Demostración: De la definición de $\phi_{n\Theta}$, la proposición 2.5.1 y el diagrama siguiente

$$\begin{array}{ccc} J(C) & \xrightarrow{\pi^*} & J(\tilde{C}) \\ \downarrow \phi_{(\pi^*)^*\tilde{\Theta}} & & \downarrow \phi_{\tilde{\Theta}} \\ \widehat{J(C)} & \xleftarrow{\widehat{\pi^*}} & \widehat{J(\tilde{C})} \end{array}$$

se tiene:

$$\begin{aligned} \phi_{(\pi^*)^*\tilde{\Theta}} &= \widehat{\pi^*} \circ \phi_{\tilde{\Theta}} \circ \pi^* = \phi_{\Theta} \circ Nm \circ \phi_{\tilde{\Theta}}^{-1} \circ \phi_{\tilde{\Theta}} \circ \pi^* \circ \phi_{n\Theta} \\ &= \phi_{\Theta} \circ Nm \circ \pi^* = n\phi_{\Theta} \\ &= \phi_{n\Theta} \end{aligned}$$

Sea $Y = \text{Im}(\pi^*) = \pi^*J(C)$ y P la subvariedad abeliana complementaria de Y en $J(C)$ respecto a la polarización $\tilde{\Theta}$ entonces:

Proposición 2.5.2: *Si $\tilde{C} \xrightarrow{\pi} C$ es de grado 2 no ramificado, o sólo tiene dos puntos de ramificación, entonces, ϕ_{j^*P} es de tipo $\underbrace{(2, \dots, 2)}_{\dim P}$.*

Demostración:

1. π es de grado 2 y ramificado en dos puntos.

Por hipótesis π solo tiene dos puntos de ramificación, entonces π^* es un isomorfismo con su imagen, es decir, $Y = \pi^*(J(C)) \simeq J(C)$.

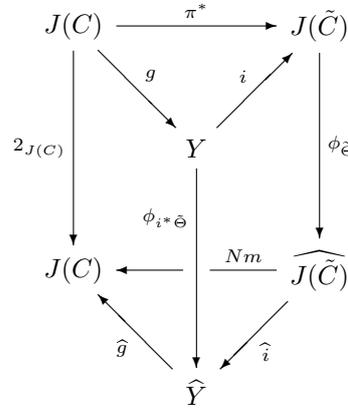
Como $(\pi^*)^*\tilde{\Theta}$ es de tipo $\underbrace{(2, \dots, 2)}_{\dim Y}$ la proposición 2.4.2 implica que $j^*\Theta$ es de tipo $\underbrace{(2, \dots, 2)}_{\dim Y}$

siempre que $\dim Y = \dim P$, por ello, basta probar que $\dim Y = \dim P$.

En efecto $\dim P = \dim J(\tilde{C}) - \dim Y = 2g_C - g_C = \dim J(C) = \dim Y$, por lo que $j^*\Theta$ es de tipo $\underbrace{(2, \dots, 2)}_{\dim Y}$.

2. π es de grado 2 sin puntos de ramificación.

La aplicación π^* factoriza en una isogenia g de grado 2 y el encaje canónico i , por lo que el siguiente diagrama conmuta:



Del diagrama se sigue que $(\pi^*)^*\tilde{\Theta} = g^* \circ i^*\tilde{\Theta} = 2\Theta$ es de tipo $(2, \dots, 2)$. Como $\underbrace{2 \cdot \dots \cdot 2}_{\dim Y} = \chi(g^* \circ i^* \circ \phi_{\tilde{\Theta}}) = \deg g^* \chi(i^* \circ \phi_{\tilde{\Theta}}) = 2 \cdot d_1 \cdot \dots \cdot d_{\dim Y}$, $d_{\dim Y} = 2$ y $d_i \mid d_{i+1}$ para $i = 1, \dots, \dim Y - 1$, entonces $d_1 = 1$ y $d_i = 2$ para $i = 1, \dots, \dim Y - 1$. Por lo tanto $i^*\phi_{\tilde{\Theta}}$ es de tipo $(1, 2, \dots, 2)$.

Además, como $\dim P = 2g_C - 1 - \dim Y = 2 \dim Y - 1 - \dim Y = \dim Y - 1$, la proposición 2.4.2 implica que $j^*\Theta$ es de tipo $\underbrace{(2, \dots, 2)}_{\dim Y - 1}$.

■

La proposición anterior nos da dos de los casos en que existe la variedad de Prym asociada al cubriente, el tercer caso consiste en un cubriente $f : \tilde{C} \rightarrow C$ de curvas suaves proyectivas donde \tilde{C} es de género 2, C es una curva elíptica y f es de grado 3 con 2 puntos de ramificación, la demostración está detallada en [4].

2.6 Variedad de Prym de un par de cubrientes.

Continuando con la idea de asociar a un cubriente de curvas suaves proyectivas $f : X \rightarrow Y$ una subvariedad abeliana de la jacobiana $J(X)$, H. Lange y S. Recillas los estudiaron por pares, esto es, consideraron $f_i : X \rightarrow X_i$, $i = 1, 2$ cubrientes de curvas suaves proyectivas y le asociaron una subvariedad abeliana $P(f_1, f_2)$ de $J(X)$, ver [7] y [8].

2.6.1 Definición de $P(f_1, f_2)$

Sabemos que un morfismo $f : X \rightarrow Y$ de curvas suaves proyectivas de grado n induce la aplicación $f^* : J(Y) \rightarrow J(X)$; se define la variedad de Prym del morfismo $P(f)$ como la subvariedad abeliana complementaria de $f^*J(Y)$ respecto a la polarización canónica de $J(X)$.

Observación 2.6.1: $P(f)$ no es necesariamente la variedad de Prym en sentido clásico.

Proposición 2.6.1: Sean $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow Z$ morfismos de curvas suaves proyectivas de grado n y m respectivamente, entonces $P(f)$ y $f^*P(g)$ son subvariedades abelianas de $P(f \circ g)$ y la aplicación suma define una isogenia $P(f) \times f^*P(g) \rightarrow P(f \circ g)$.

Demostración: La aplicación suma induce la isogenia

$$P(g \circ f) \times (g \circ f)^*J(Z) \rightarrow J(X).$$

Combinando las isogenias análogas

$$\begin{aligned} f^*P(g) \times (g \circ f)^*J(Z) &\rightarrow f^*J(Y) \\ P(f) \times f^*J(Y) &\rightarrow J(X) \end{aligned} \quad (2.5)$$

obtenemos la isogenia

$$P(f) \times f^*P(g) \times (g \circ f)^*J(Z) \rightarrow J(X)$$

inducida por la aplicación suma.

Como $P(f)$ y $f^*P(g)$ son obviamente subvariedades de $P(g \circ f)$ se concluye lo esperado. \blacksquare

Supongamos que se tiene el siguiente diagrama de morfismos de curvas suaves proyectivas:

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ f_1 \swarrow & & \searrow f_2 \\ X_1 & & X_2 \\ g_1 \searrow & & \swarrow g_2 \\ & Y & \end{array} \quad (2.6)$$

Proposición 2.6.2: Sean g_1 y g_2 tales que no factorizan vía un mismo morfismo $Y' \rightarrow Y$ de grado $q \geq 2$, entonces la variedad $f_2^*P(g_2)$ es una subvariedad abeliana de la variedad de Prym $P(f_1)$.

Demostración: (Por pasos)

1. f_1 y f_2 no factorizan vía un mismo morfismo $f : X \rightarrow X'$.

Por la propiedad universal del producto fibrado, estudiar el diagrama (2.6) equivale a estudiar el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & & X & & \\ & f_1 \swarrow & \downarrow n & \searrow f_2 & \\ X_1 & \xleftarrow{p_1} & X_1 \times_Y X_2 & \xrightarrow{p_2} & X_2 \\ & g_1 \searrow & & \swarrow g_2 & \\ & & Y & & \end{array} \quad (2.7)$$

en el que $n : X \rightarrow X_1 \times_Y X_2$ denota la normalización y $p_i : X_1 \times_Y X_2 \rightarrow X_i$, $i = 1, 2$ las proyecciones.

Del diagrama (2.7), para cada $L \in J(X)$

$$N_{f_1}(f_2^*(L)) = N_{p_1}N_n(n^*p_2^*(L)) = N_{p_1}p_2^*(L) = g_1^*N_{g_2}(L) \quad (2.8)$$

Observación 2.6.2: La última igualdad en (2.8) se tiene de la Proposición 6.5.8 en [1].

De aquí es fácil ver que $f_2^*P(g_2) \subset P(f_1)$.

2. f_1 y f_2 factorizan vía un mismo morfismo $f : X \rightarrow X'$ (caso general).

Supongamos que se tiene el diagrama siguiente:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & X & & \\
 & f_1 \swarrow & \downarrow f & \searrow f_2 & \\
 X_1 & \xleftarrow{f'_1} & X' & \xrightarrow{f'_2} & X_2 \\
 & \searrow g_1 & & \swarrow g_2 & \\
 & & Y & &
 \end{array} \tag{2.9}$$

Aplicando el paso 1 a la parte inferior del diagrama (2.9) se tiene que

$$(f'_2)^*P(g_2) \subset P(f'_1)$$

por lo tanto

$$f^*(f'_2)^*P(g_2) \subset f^*P(f'_1).$$

El resultado se tiene haciendo uso de la proposición 2.6.1 y observando que

$$f^*(f'_2)^*P(g_2) = (f'_2f)^*P(g_2) = f_2^*P(g_2)$$

■

La polarización principal canónica de $J(X)$ induce una polarización en $P(f_1)$ y por lo tanto para las subvariedades abelianas complementarias P_1 y $f_2^*P(g_2)$ en $P(f_1)$ la aplicación suma induce una isogenia de variedades abelianas polarizadas

$$P_1 \times f_2^*P(g_2) \rightarrow P(f_1) \tag{2.10}$$

Análogamente para P_2 y $f_1^*P(g_1)$ subvariedades abelianas complementarias en $P(f_2)$ se tiene la isogenia

$$P_2 \times f_1^*P(g_1) \rightarrow P(f_2)$$

Como era de esperarse, tanto P_1 y P_2 tienen polarizaciones por ser subvariedades de JX , sean H_1 y H_2 tales polarizaciones respectivamente.

Proposición 2.6.3: Las subvariedades abelianas polarizadas (P_1, H_1) y (P_2, H_2) de JX coinciden.

Demostración: Es suficiente mostrar que $P_1 = P_2$ ya que las polarizaciones en P_1 y P_2 son inducidas por la polarización canónica principal de JX .

Recordemos que dadas las subvariedades abelianas complementarias P_i y $f_j^*P(g_j)$ de $P(f_i)$, $\{i, j\} \subset \{1, 2\}$ y dado el diagrama (2.6) la aplicación suma induce isogenias

$$f_1^*g_1^*J(Y) \times f_1^*P(g_1) \rightarrow f_1^*J(X_1)$$

$$P_1 \times f_2^*P(g_2) \rightarrow P(f_1)$$

$$f_2^*g_2^*J(Y) \times f_2^*P(g_2) \rightarrow f_2^*J(X_2)$$

$$P_2 \times f_1^*P(g_1) \rightarrow P(f_2)$$

de las cuales se tienen las aplicaciones

$$\begin{aligned} f_1^* g_1^* J(Y) \times f_1^* P(g_1) \times f_2^* P(g_2) \times P_1 &\rightarrow f_1^* J(X_1) \times P(f_1) \rightarrow J(X) \\ f_2^* g_2^* J(Y) \times f_2^* P(g_2) \times f_1^* P(g_1) \times P_2 &\rightarrow f_2^* J(X_2) \times P(f_2) \rightarrow J(X) \end{aligned} \quad (2.11)$$

que son también isogenias.

Observando que $f_1^* g_1^* = f_2^* g_2^*$ y si Z denota la imagen de $f_1^* g_1^* J(Y) \times f_1^* P(g_1) \times f_2^* P(g_2)$ en $J(X)$, (2.11) se reduce a

$$Z \times P_1 \rightarrow J(X)$$

$$Z \times P_2 \rightarrow J(X)$$

Como las correspondientes descomposiciones de espacios tangentes son ortogonales con respecto a la forma hermitiana asociada a la polarización canónica se concluye que P_1 y P_2 son el complemento de Z en $J(X)$. La unicidad del complemento garantiza que $P_1 = P_2$. ■

Definición 2.6.1: Se define la variedad de Prym del par de cubrientes (f_1, f_2) como la variedad abeliana polarizada (P_1, H_1) y se denota por $P(f_1, f_2)$.

Lo anterior nos dice que $P(f_1, f_2)$ está bien definida para cualesquier par de cubrientes de curvas suaves proyectivas.

Lema 2.6.1: Sean Y y Z subvariedades abelianas de una variedad abeliana X principalmente polarizada, supongamos que (Y_1, P) y (Z_1, P) son respectivamente subvariedades abelianas complementarias de Y y Z tales que

$$\begin{aligned} T_e(Y) &= T_e(Y_1) \oplus T_e(P) \\ T_e(Z) &= T_e(Z_1) \oplus T_e(P) \end{aligned} \quad (2.12)$$

respecto a la forma hermitiana dada por la polarización en X , entonces

$$T_e(Y \cap Z) = T_e(P) \oplus W$$

donde $W \subset T_e(Y_1 \cap Z_1)$

Demostración: El lema se sigue de observar que W es el complemento ortogonal de $T_e(P)$ en $T_e(Y \cap Z)$ y las ecuaciones en (2.12) ■

¿Existe alguna relación entre $P(f_1, f_2)$ y $P(f_i)$, $i = 1, 2$? La respuesta la tiene la siguiente proposición:

Proposición 2.6.4: $P(f_1, f_2) = (P(f_1) \cap P(f_2))^0$.

Demostración: Como

$$\begin{aligned} P(f_1) &=_{i} f_2^* P(g_2) + P(f_1, f_2) \\ P(f_2) &=_{i} f_1^* P(g_1) + P(f_1, f_2) \end{aligned}$$

y las descomposiciones en espacios tangentes son ortogonales respecto a la forma hermitiana dada por la polarización en $J(X)$, del lema 2.6.1 basta probar que $K = f_1^* P(g_1) \cap f_2^* P(g_2)$ es finito, ya que de serlo, el complemento ortogonal de $T_0(P(f_1, f_2))$ en $T_0(P(f_1) \cap P(f_2))$ tiene dimensión 0 y por lo tanto $(P(f_1) \cap P(f_2))^0 = P(f_1, f_2)$.

Veamos que K es finito.

$$\begin{aligned} P(g_2) \subset J(X_2) &\implies f_2^* P(g_2) \subset f_2^* J(X_2) \\ &\implies f_2^* P(g_2) \cap P(f_2) \subset f_2^* J(X_2) \cap P(f_2) \end{aligned}$$

como $J(X_2) =_i P(f_2) + f_2^* J(X_2)$ y la suma es isógena, entonces $f_2^* J(X_2) \cap P(f_2)$ es finito y por lo tanto $f_2^* P(g_2) \cap P(f_2)$ es finito.

Como $f_1^* P(g_1) \subset P(f_2)$, entonces

$$f_1^* P(g_1) \cap f_2^* P(g_2) \subset P(f_2) \cap f_2^* P(g_2)$$

por lo tanto K es finito. ■

2.6.2 La dimensión de $P(f_1, f_2)$.

En esta sección mencionaremos algunos de los resultados recientes que hemos estudiado y que se pretenden generalizar para tres cubrientes.

Para cualesquiera f morfismo de curvas suaves proyectivas, denotemos por ω_f el grado de ramificación del divisor de f , entonces para $d_1 = \deg(g_1) = \deg(f_2)$ y $d_2 = \deg(g_2) = \deg(f_1)$, usando la fórmula de Riemann-Hurwitz, se tienen las ecuaciones

$$g_x = 1 + d_2(g_{x_1} - 1) + \frac{1}{2}\omega_{f_1} \quad (2.13)$$

$$g_x = 1 + d_1(g_{x_2} - 1) + \frac{1}{2}\omega_{f_2} \quad (2.14)$$

$$g_{x_1} = 1 + d_1(g_y - 1) + \frac{1}{2}\omega_{g_1} \quad (2.15)$$

$$g_{x_2} = 1 + d_2(g_y - 1) + \frac{1}{2}\omega_{g_2} \quad (2.16)$$

que serán de gran utilidad en la demostración de la siguiente proposición.

Proposición 2.6.5: $\dim P(f_1, f_2) = (d_1 - 1)(d_2 - 1)(g_y - 1) + \frac{1}{2}(\omega_{f_1} + (d_2 - 1)\omega_{g_1} - \omega_{g_2})$

Demostración: De (2.10) y haciendo $f = f_1$ y $Y = X_1$ en (2.5) se tienen las ecuaciones

$$\begin{aligned} \dim P_1 + \dim f_2^* P(g_2) &= \dim P(f_1) \\ \dim P(f_1) + \dim f_1^* J(X_1) &= \dim J(X) \end{aligned} \quad (2.17)$$

Combinando las ecuaciones en (2.17) se tiene que

$$\dim P_1 = \dim P(f_1) - \dim f_2^* P(g_2) = g_x - g_{x_1} + g_y - g_{x_2} \quad (2.18)$$

Sustituyendo (2.13), (2.15) y (2.16) en (2.18) se concluye lo esperado. ■

Utilizando la ecuación (2.14) en lugar de la (2.13) en la demostración de la proposición anterior se tiene un resultado similar, a saber

$$\dim P(f_1, f_2) = (d_1 - 1)(d_2 - 1)(g_y - 1) + \frac{1}{2}(\omega_{f_2} - \omega_{g_1} + (d_1 - 1)\omega_{g_2}) \quad (2.19)$$

De la proposición 2.6.5 y (2.19) es fácil ver que

$$\omega_{f_1} - \omega_{f_2} = d_1\omega_{g_2} - d_2\omega_{g_1} \quad (2.20)$$

Haciendo lo análogo a lo anterior para las ecuaciones

$$\begin{aligned} g_x &= 1 + d_1 d_2 (g_y - 1) + \frac{1}{2}\omega_{g_1 f_1} \\ g_x &= 1 + d_1 d_2 (g_y - 1) + \frac{1}{2}\omega_{g_2 f_2} \end{aligned} \quad (2.21)$$

se tienen los resultados siguientes

$$\dim P(f_1, f_2) = (d_1 - 1)(d_2 - 1)(g_Y - 1) + \frac{1}{2}(\omega_{g_1 f_1} - \omega_{g_1} - \omega_{g_2}) \quad (2.22)$$

$$\dim P(f_1, f_2) = (d_1 - 1)(d_2 - 1)(g_Y - 1) + \frac{1}{2}(\omega_{g_2 f_2} - \omega_{g_1} - \omega_{g_2})$$

de los cuales se tiene que

$$\omega_{g_1 f_1} = \omega_{g_2 f_2} = \omega_{f_1} + d_2 \omega_{g_1} = \omega_{f_2} + d_1 \omega_{g_2} \quad (2.23)$$

2.6.3 Restricción de la polarización canónica a $P(f_1, f_2)$

Sea (X, L) una variedad abeliana polarizada sobre un campo algebraicamente cerrado de característica cero. Recordemos que

1. $K(L)$ denota el kernel del homomorfismo $\phi_L : X \rightarrow \widehat{X}$.
2. L es de tipo (d_1, \dots, d_g) si y sólo si $K(L) \simeq (\mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/d_g\mathbb{Z})^2$
3. Dada la subvariedad abeliana A de X con encaje canónico $i_A : A \rightarrow X$ la subvariedad abeliana complementaria de A se denota por $P = \ker(\widehat{1} \circ \phi_A : X \rightarrow \widehat{A})^0 = (\ker(N_A))^0$.
4. Si L es una polarización principal $K(L_Y) \simeq K(L_Z) \simeq Y \cap Z$ donde L_Y y L_Z son las restricciones de L a A y P respectivamente.
5. Si L no es una polarización principal

$$|K(L_Y)| \cdot |K(L_Z)| = |Y \cap Z|^2 \cdot |K(L)| \quad (2.24)$$

$$|K(L_Y)| = |K(L) \cap Y| \cdot |Y \cap Z| \quad (2.25)$$

y además las sucesiones

$$0 \longrightarrow K(L) \cap Z \xrightarrow{i} K(L_Z) \longrightarrow Y \cap Z \longrightarrow 0 \quad (2.26)$$

$$0 \longrightarrow Y \cap Z \xrightarrow{i} K(L_Z) \longrightarrow K(L) \cap Z \longrightarrow 0 \quad (2.27)$$

donde i es la inclusión, son exactas [5].

6. Dado $f : X \rightarrow Y$ morfismo de curvas suaves proyectivas de grado n la subvariedad abeliana complementaria $P(f)$ de $f^*J(Y)$ es la componente conexa que contiene al cero del $\ker(N_f : J(X) \rightarrow J(Y))$.
7. f^* es inyectiva si y sólo si f no factoriza vía una cubriente cíclico no ramificado. Si éste es el caso entonces $\ker(N_f)$ es conexo.
8. Si f es cíclico y no ramificado entonces $\ker(f^*) = \langle \eta \rangle$ donde $\eta \neq 0 \in J(Y)[n]$.
9. Dado el diagrama (2.6), si g_1 y g_2 no factorizan vía un mismo cubriente $Y' \rightarrow Y$ de grado $q \geq 2$ se define la variedad de Prym $P(f_1, f_2)$ asociada al par de cubrientes (f_1, f_2) .

Supongamos que se tiene el diagrama conmutativo de morfismos finitos de curvas suaves proyectivas:

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ f_1 \swarrow & & \searrow f_2 \\ X_1 & & X_2 \\ g_1 \searrow & & \swarrow g_2 \\ & \mathbb{P}^1 & \end{array}$$

con las siguientes propiedades:

1. g_1 y g_2 no factorizan vía un mismo cubriente $Y' \rightarrow Y$ de grado $q \geq 2$.
2. X es la normalización del producto cartesiano $X_1 \times_{\mathbb{P}^1} X_2$.
3. g_1 y g_2 son de grados $d_1 \geq 2$ y $d_2 \geq 2$ respectivamente y además $m.c.d.(d_1, d_2) = 1$.
4. X_1 y X_2 tienen género $g_{X_1} \geq 1$ y $g_{X_2} \geq 1$ respectivamente.
5. f_1 y f_2 no factorizan vía un cubriente cíclico étale de grado mayor o igual a dos.

Bajo estas condiciones se tiene la siguiente

Proposición 2.6.6: *Sea Θ la polarización canónica de $J(X)$ y denotemos por*

entonces

$$L := \Theta|_{P(f_1)}, \quad L_{f_2^*P(g_2)} := L|_{f_2^*P(g_2)} = \Theta|_{f_2^*P(g_2)} \quad \text{y} \quad L_{P(f_1, f_2)} := L|_{P(f_1, f_2)} = \Theta|_{P(f_1, f_2)}$$

$$K(L_{P(f_1, f_2)}) \simeq K(L) \oplus K(L_{f_2^*P(g_2)}).$$

Demostración: Por hipótesis $g_{X_i} \geq 1$, $d_i \geq 2$ y f_i no factoriza vía un cubriente cíclico étale de grado mayor o igual a dos, entonces $r_i = \dim(P(f_i)) \geq \dim(f_i^*J(X_i))$ $i = 1, 2$ y f_i^* es inyectiva $i = 1, 2$ por lo tanto de la proposición (2.4.2) y dado que $(f_i^*)^*\Theta$ es de tipo $(\underbrace{d_j, \dots, d_j}_{g_{X_i}})$ se tiene lo siguiente :

L y $L_{f_2^*P(g_2)}$ son de tipo $(\underbrace{1, \dots, 1}_{r_1 - g_{X_1}}, \underbrace{d_2, \dots, d_2}_{g_{X_1}}, \underbrace{d_1 d_2, \dots, d_1 d_2}_{g_{X_2}})$ y $(\underbrace{d_1, \dots, d_1}_{g_{X_2}})$ y de exponentes d_1 y d_2 respectivamente; esto último se tiene al observar que $P(g_2) = J(X_2)$. Ahora bien, como $m.c.d.(|K(L)|, |K(L_{f_2^*P(g_2)})|) = 1$ de (2.26) en 5 se tiene que $K(L) \cap f_2^*(g_2)P = 0$ por lo que 5 implica que

$$|K(L_{P(f_1, f_2)})| = |K(L)| \cdot |K(L_{f_2^*P(g_2)})|$$

por lo tanto se concluye lo esperado. ■

Observación 2.6.3: *La proposición 2.6.6 también se cumple si f_1 y f_2 factorizan vía un cubriente étale de grado mayor o igual a dos. Proposición 3.1 en [7].*

La proposición anterior nos da condiciones bajo las cuales se conoce el tipo de la polarización de $P(f_1, f_2)$ dicho tipo al suponer que $g_{X_1} \geq g_{X_2}$ es: $(\underbrace{1, \dots, 1}_{g_X - 2g_{X_1} - g_{X_2}}, \underbrace{d_2, \dots, d_2}_{g_{X_1} - g_{X_2}}, \underbrace{d_1 d_2, \dots, d_1 d_2}_{g_{X_2}})$.

De aquí es fácil ver que si $g_{X_1} = g_{X_2}$ entonces $P(f_1, f_2)$ es de tipo $(\underbrace{1, \dots, 1}_{g_X - 3g_{X_1}}, \underbrace{d_1 d_2, \dots, d_1 d_2}_{g_{X_1}})$, por

lo que $P(f_1, f_2)$ es de Prym-Tyurin de exponente $d_1 d_2$ en $J(X)$ si y sólo si $g_X - 3g_{X_1} = 0$ y $\dim P(f_1, f_2) = g_X - g_{X_2} - g_{X_1} = g_{X_1}$.

Supongamos ahora que f_2 es cíclico étale, entonces $L_{f_2^*P(g_2)}$ es de tipo $(\underbrace{d_1, \dots, d_1}_{g_{X_2} - 1})$, por lo tanto

la proposición 2.6.6 implica que $L_{P(f_1, f_2)}$ es de tipo

$$(\underbrace{1, \dots, 1}_{g_X - 2g_{X_1} - g_{X_2}}, \underbrace{d_2, \dots, d_2}_{g_{X_1} - g_{X_2} + 1}, \underbrace{d_1 d_2, \dots, d_1 d_2}_{g_{X_2} - 1})$$

siempre que $g_{X_1} \geq g_{X_2} - 1$. Si suponemos además que $g_{X_1} = g_{X_2} - 1$ se tiene que $L_{P(f_1, f_2)}$ es de tipo

$$(\underbrace{1, \dots, 1}_{g_X - 3g_{X_2} + 2}, \underbrace{d_1 d_2, \dots, d_1 d_2}_{g_{X_1}})$$

Por lo tanto $P(f_1, f_2)$ es de Prym-Tyurin de exponente $d_1 d_2$ en $J(X)$ si y sólo si $g_X - 3g_{X_2} + 2 = 0$ y $\dim P(f_1, f_2) = g_{X_1}$. La fórmula de Riemann-Hurwitz implica, para f_2

$$g_X = d_1(g_{X_2} - 1) + 1$$

por lo tanto

$$g_X - 3g_{X_2} + 2 = 0 \Leftrightarrow d_1(g_{X_2} - 1) + 1 - 3g_{X_2} + 2 = 0 \Leftrightarrow (d_1 - 3)(g_{X_2} - 1) = 0 \Leftrightarrow d_1 = 3.$$

Lo anterior prueba las proposiciones siguientes:

Proposición 2.6.7: *Bajo las condiciones de la proposición 2.6.6 $P(f_1, f_2)$ es de Prym-Tyurin de exponente $d_1 d_2$ en $J(X)$ si y sólo si $\dim P(f_1, f_2) = g_{X_1} = g_{X_2}$.*

Proposición 2.6.8: *Si en las condiciones de la proposición 2.6.6 f_2 es cíclico étale entonces $P(f_1, f_2)$ es de Prym-Tyurin de exponente $d_1 d_2$ en $J(X)$ si y sólo si $\dim P(f_1, f_2) = g_{X_1} = g_{X_2} - 1$ y $d_1 = 3$.*

3. LA VARIEDAD $P(L_1, L_2, L_3)$

Durante el estudio del diagrama (1.1) en busca de la definición de la variedad de Prym de 3 cubrientes nos encontramos con una variedad muy especial a la cual le calculamos el tipo de la polarización inducida por la polarización principal de $J(X_{123})$.

3.1 Definición de $P(l_1, l_2, l_3)$

Dado el diagrama (1.1) consideremos la siguiente versión del mismo

$$\begin{array}{ccccc}
 & & X_{123} & & \\
 & l_1 \swarrow & \downarrow l_2 & \searrow l_3 & \\
 X_1 & & X_2 & & X_3 \\
 & g_1 \searrow & \downarrow g_2 & \swarrow g_3 & \\
 & & Y & &
 \end{array} \tag{3.1}$$

Aplicando los resultados de variedades de Prym de pares de cubrientes , así como también la proposición (2.6.4) a los diagramas

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccc}
 & X_{123} & \\
 l_1 \swarrow & & \searrow l_2 \\
 X_1 & & X_2 \\
 g_1 \searrow & & \swarrow g_2 \\
 & Y &
 \end{array} &
 \begin{array}{ccc}
 & X_{123} & \\
 l_1 \swarrow & & \searrow l_3 \\
 X_1 & & X_3 \\
 g_1 \searrow & & \swarrow g_3 \\
 & Y &
 \end{array} &
 \begin{array}{ccc}
 & X_{123} & \\
 l_2 \swarrow & & \searrow l_3 \\
 X_2 & & X_3 \\
 g_2 \searrow & & \swarrow g_3 \\
 & Y &
 \end{array}
 \end{array} \tag{3.2}$$

para $\{i, j\} \subset \{1, 2, 3\}$, tenemos la siguiente información:

$$\begin{aligned}
 P(l_i) &= {}_i l_j^* P(g_j) + P(l_i, l_j) \\
 P(l_j) &= {}_i l_i^* P(g_i) + P(l_i, l_j) \\
 P(l_i) \cap P(l_j) &= P(l_i, l_j) + K_{ij}
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

donde K_{ij} es un conjunto finito.

Sea $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ entonces las ecuaciones anteriores y el lema 2.6.1 implican

$$P(l_1) \cap P(l_2) \cap P(l_3) = P(l_i, l_j) \cap P(l_i, l_k) + K_{(ij, ik)}$$

donde $K_{ij, ik}$ es un conjunto finito, por lo tanto

$$(P(l_1) \cap P(l_2) \cap P(l_3))^0 = (P(l_i, l_j) \cap P(l_i, l_k))^0 \tag{3.4}$$

¿Será $P = (P(l_1) \cap P(l_2) \cap P(l_3))^0$ el complemento de $l_i^*P(g_i)$ en $P(l_j, l_k)$?

Con el fin de responder esta pregunta observemos que de (3.3)

$$l_i^*P(g_i) \subset P(l_j) \quad \text{y} \quad l_i^*P(g_i) \subset P(l_k)$$

entonces $l_i^*P(g_i) \subset (P(l_j) \cap P(l_k))^0 = P(l_j, l_k)$.

Sea P_i el complemento de la subvariedad abeliana $l_i^*P(g_i)$ en $P(l_j, l_k)$, esto es:

$$P(l_j, l_k) =_i l_i^*P(g_i) + P_i \quad (3.5)$$

Por definición de variedades de Prym, la aplicación suma induce isogenias

$$\begin{aligned} l_1^*J(X_1) \times l_2^*P(g_2) \times l_3^*P(g_3) \times P_3 &\longrightarrow l_1^*J(X_1) \times l_2^*P(g_2) \times P(l_1, l_2) \\ &\longrightarrow l_1^*J(X_1) \times P(l_1) \longrightarrow J(X_{123}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l_1^*J(X_1) \times l_3^*P(g_3) \times l_2^*P(g_2) \times P_2 &\longrightarrow l_1^*J(X_1) \times l_3^*P(g_3) \times P(l_1, l_3) \\ &\longrightarrow l_1^*J(X_1) \times P(l_1) \longrightarrow J(X_{123}) \end{aligned}$$

por lo tanto, si Z denota la imagen de $l_1^*J(X_1) \times l_2^*P(g_2) \times l_3^*P(g_3)$ en $J(X)$ la aplicación suma nos da isogenias

$$Z \times P_3 \longrightarrow J(X_{123}) \quad \text{y} \quad Z \times P_2 \longrightarrow J(X_{123})$$

ahora, como las descomposiciones de los espacios tangentes correspondientes son ortogonales respecto a la forma hermitiana asociada a la polarización canónica de $J(X_{123})$ se tiene que $P_3 = P_2$. De manera análoga las isogenias

$$\begin{aligned} l_3^*J(X_3) \times l_1^*P(g_1) \times l_2^*P(g_2) \times P_2 &\longrightarrow l_3^*J(X_3) \times l_1^*P(g_1) \times P(l_1, l_3) \\ &\longrightarrow l_3^*J(X_3) \times P(l_3) \longrightarrow J(X_{123}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l_3^*J(X_3) \times l_2^*P(g_2) \times l_1^*P(g_1) \times P_1 &\longrightarrow l_3^*J(X_3) \times l_2^*P(g_2) \times P(l_2, l_3) \\ &\longrightarrow l_3^*J(X_3) \times P(l_3) \longrightarrow J(X_{123}) \end{aligned}$$

implican que $P_1 = P_2$ y por lo tanto $P_1 = P_2 = P_3$.

Sea $P_1 = P(l_1, l_2, l_3)$ entonces (3.5) se reescribe como sigue

$$P(l_j, l_k) =_i l_i^*P(g_i) + P(l_1, l_2, l_3) \quad (3.6)$$

De (3.6) y el lema 2.6.1 se sigue que

$$P(l_1, l_2, l_3) =_i (P(l_i, l_j) \cap P(l_i, l_k))^0$$

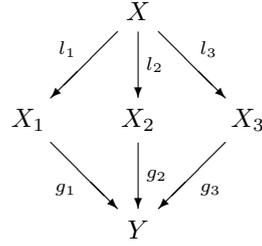
por lo tanto de (3.4) se concluye que

$$P = P(l_1, l_2, l_3)$$

De lo anterior se tiene la siguiente

Definición 3.1.1: Se define la variedad $(P(l_1, l_2, l_3), H)$ como la subvariedad abeliana complementaria de $l_i^*P(g_i)$ en $P(l_j, l_k)$ donde H es la polarización inducida por la polarización canónica principal L de $J(X_{123})$ en $P(l_1, l_2, l_3)$.

Observación 3.1.1: Esta definición es válida para el diagrama



cuando X factoriza por X_{123} y se tienen las condiciones del diagrama (1.1)

Proposición 3.1.1: Si $X = X_1 \times_Y X_2 \times_Y X_3$, deg $g_i = d_i$ y ω_{g_i} y ω_{l_i} denota el grado de ramificación de g_i y l_i respectivamente, entonces

$$\begin{aligned}
 \dim P(l_1, l_2, l_3) &= [d_1 d_2 d_3 - (d_1 + d_2 + d_3) + 2][g_Y - 1] \\
 &\quad + \frac{1}{2}[\omega_{l_i} - \omega_{g_j} - \omega_{g_k} + (d_j d_k - 1)\omega_{g_i}]
 \end{aligned}$$

donde $i \neq j \neq k$ y $\{k, j, i\} \subset \{1, 2, 3\}$.

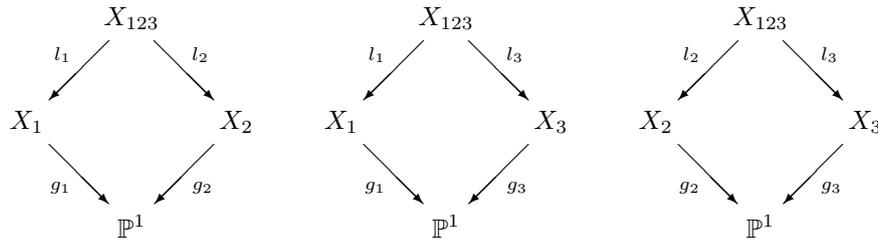
Demostración: La igualdad se obtiene de las ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned}
 \dim P(l_1, l_2, l_3) &= g_X - g_{X_1} - g_{X_2} - g_{X_3} + 2g_Y \\
 g_X &= 1 + d_1 d_2 d_3 (g_Y - 1) + \frac{1}{2}(d_i d_j \omega_{g_k} + \omega_{l_k}) \\
 g_{X_i} &= 1 + d_i (g_Y - 1) + \frac{1}{2} \omega_{g_i}
 \end{aligned}$$

■

3.2 La polarización de $P(l_1, l_2)$

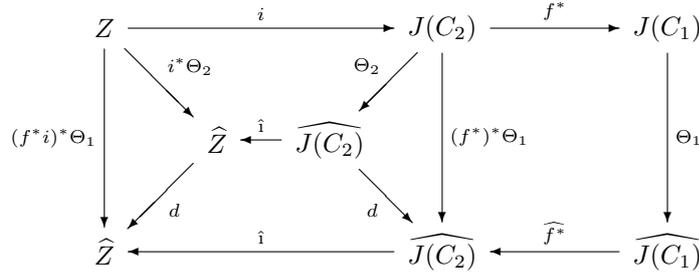
Los resultados que se tienen para calcular el tipo de la polarización de la variedad de Prym de un par de cubiertas $P(f_1, f_2)$ son válidos únicamente cuando el m.c.d. $(e(f_2^* P(g_2)), e(P(f_1))) = 1$. Para calcular el tipo de las polarizaciones de las variedades de Prym asociadas a los diagramas



donde el grado de $l_i = h_i^j \circ h_{ij} = h_i^k \circ h_{ik}$ es $d_j d_k$ para $i \neq j \neq k$ y $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$, no podemos usar dichos resultados ya que $\text{m.c.d.}(e(l_i^* P(g_j)), e(P(l_i))) = d_k$.

Proposición 3.2.1: Sea $f : C_1 \rightarrow C_2$ un morfismo de grado d de curvas suaves proyectivas y Z una subvariedad abeliana de $(J(C_2), \Theta_2)$. Si $\Theta_2|_Z$ es de tipo (d_1, \dots, d_s) entonces $\Theta_1|_{f^*Z}$ es de tipo (dd_1, \dots, dd_s) .

Demostración: Considere el diagrama



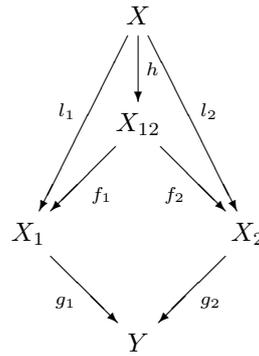
Sea i_1 la inclusión de f^*Z en $J(C_1)$, entonces

$$i_1^*\Theta_1 \equiv (f^*i)^*\Theta_1 \equiv i^*(f^*)^*\Theta_1 \equiv i^*d\Theta_2 \equiv d \cdot i^*\Theta_2$$

■

Proposición 3.2.2: Sea $h : X \rightarrow X_{12}$ un morfismo de grado d_3 de curvas suaves proyectivas. Si Z es la subvariedad abeliana complementaria de $P(f_1, f_2)$ en $J(X_{12})$ entonces $P(l_1, l_2)$ es la subvariedad abeliana complementaria de $h^*(Z)$ en $J(X)$.

Demostración: Considere el diagrama



Por definición de variedades de Prym

$$J(X_{12}) =_i (f_1)^*J(X_1) + (f_2)^*P(g_2) + P(f_1, f_2) \tag{3.7}$$

$$J(X) =_i l_1^*J(X_1) + l_2^*P(g_2) + P(l_1, l_2). \tag{3.8}$$

De (3.7) se sigue que $Z =_i (f_1)^*J(X_1) + (f_2)^*P(g_2)$ y por lo tanto, como

$$h^*(Z) =_i h^*(f_1)^*J(X_1) + h^*(f_2)^*P(g_2) =_i l_1^*J(X_1) + l_2^*P(g_2)$$

la ecuación (3.8) implica el resultado. ■

Proposición 3.2.3: Si l_i^* y l_j^* son inyectivas entonces $L_{P(l_i, l_j)}$ es de tipo

$$\left(\underbrace{1, \dots, 1}_{g_X - 2(g_{X_i} + g_{X_j})}, \underbrace{d_k, \dots, d_k}_{g_{X_i}}, \underbrace{d_i d_k, \dots, d_i d_k}_{g_{X_j} - g_{X_i}}, \underbrace{d_i d_j d_k, \dots, d_i d_j d_k}_{g_{X_i}} \right)$$

Demostración: Dado el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 & X_{123} & \\
 & \downarrow h_{ij} & \\
 & X_{ij} & \\
 \swarrow l_i & & \searrow l_j \\
 X_i & & X_j \\
 \swarrow h_i^j & & \searrow h_j^i \\
 & & \\
 \swarrow g_i & & \searrow g_j \\
 & \mathbb{P}^1 &
 \end{array} \tag{3.9}$$

si L^{ij} es la polarización canónica principal de $J(X_{ij})$ la Proposición 2.4.2 y el Lema 2.5.1 implican

$$L_{(h_j^i)^*P(g_j)}^{ij} \quad \text{es de tipo} \quad \underbrace{(d_i, \dots, d_i)}_{g_{X_j}} \tag{3.10}$$

$$L_{P(h_i^j)}^{ij} \quad \text{es de tipo} \quad (1, \dots, 1, \underbrace{d_j, \dots, d_j}_{g_{X_i}}) \tag{3.11}$$

Como $\text{m.c.d.}(d_i, d_j) = 1$, la Proposición 3.1 de [7] implica que $L_{P(h_i^j, h_j^i)}^{ij}$ es de tipo

$$\left(\underbrace{1, \dots, 1}_{g_{X_{ij}} - g_{X_i} - 2g_{X_j}}, \underbrace{d_i, \dots, d_i}_{g_{X_j} - g_{X_i}}, \underbrace{d_i d_j, \dots, d_i d_j}_{g_{X_i}} \right) \quad \text{si } g_{X_i} \leq g_{X_j}, \tag{3.12}$$

además si Z es la subvariedad abeliana complementaria de $P(h_i^j, h_j^i)$ en $J(X_{ij})$, el corolario 12.1.5 de [4] implica que L_Z^{ij} es de tipo

$$\left(\underbrace{1, \dots, 1}_{g_{X_i}}, \underbrace{d_i, \dots, d_i}_{g_{X_j} - g_{X_i}}, \underbrace{d_i d_j, \dots, d_i d_j}_{g_{X_i}} \right) \tag{3.13}$$

luego la proposición (3.2.1) implica que $L_{h_{ij}^*Z}$ es de tipo

$$\left(\underbrace{d_k, \dots, d_k}_{g_{X_i}}, \underbrace{d_i d_k, \dots, d_i d_k}_{g_{X_j} - g_{X_i}}, \underbrace{d_i d_j d_k, \dots, d_i d_j d_k}_{g_{X_i}} \right) \tag{3.14}$$

por lo tanto, la proposición (3.2.2) y el corolario 12.1.5 de [4] implican el resultado. \blacksquare

3.3 La polarización de $P(l_1, l_2, l_3)$.

En la sección anterior calculamos el tipo de la polarización inducida por la polarización de $J(X_{123})$ en $P(l_i, l_j)$, esta polarización nos permitirá calcular el tipo de la polarización de $P(l_1, l_2, l_3)$.

Ahora supongamos que $g_{X_1} \leq g_{X_2} \leq g_{X_3}$ y $\text{m.c.d.}(d_i, d_j) = 1$, entonces de (2.24) se tienen las siguientes ecuaciones

$$|K(L_{P(l_1, l_2, l_3)})| \cdot |K(L_{l_1^*P(g_1)})| = |P(l_1, l_2, l_3) \cap l_1^*P(g_1)|^2 \cdot |K(L_{P(l_2, l_3)})| \tag{3.15}$$

$$|K(L_{P(l_1, l_2, l_3)})| \cdot |K(L_{l_2^*P(g_2)})| = |P(l_1, l_2, l_3) \cap l_2^*P(g_2)|^2 \cdot |K(L_{P(l_1, l_3)})| \tag{3.16}$$

$$|K(L_{P(l_1, l_2, l_3)})| \cdot |K(L_{l_3^*P(g_3)})| = |P(l_1, l_2, l_3) \cap l_3^*P(g_3)|^2 \cdot |K(L_{P(l_1, l_2)})| \tag{3.17}$$

Como

$$\text{de (3.10), 2 y (3.2.1)} \quad |K(L_{l_i^*P}(g_i))| = (d_j d_k)^{2g_{X_i}} \quad (3.18)$$

$$\text{de (3.2.3) y 2} \quad |K(L_{P(l_i, l_j)})| = d_k^{2(g_{X_i} + g_{X_j})} d_i^{2g_{X_j}} d_j^{2g_{X_i}} \quad (3.19)$$

despejando $|K(L_{P(l_1, l_2, l_3)})|$ en (3.16) y sustituyendo en (3.17) se tiene que

$$|P(l_1, l_2, l_3) \cap l_2^*P(g_2)| = \frac{d_3^{2g_{X_2}}}{d_1^{2(g_{X_3} - g_{X_2})} d_2^{2g_{X_3}}} \cdot |P(l_1, l_2, l_3) \cap l_3^*P(g_3)| \quad (3.20)$$

Nuevamente, despejando $|K(L_{P(l_1, l_2, l_3)})|$ en (3.15) y sustituyendo en (3.16) y posteriormente en (3.17) se tiene que

$$|P(l_1, l_2, l_3) \cap l_1^*P(g_1)| = \frac{d_2^{2g_{X_1}}}{d_3^{2(g_{X_2} - g_{X_1})} d_1^{2g_{X_2}}} \cdot |P(l_1, l_2, l_3) \cap l_2^*P(g_2)| \quad (3.21)$$

$$|P(l_1, l_2, l_3) \cap l_1^*P(g_1)| = \frac{d_3^{2g_{X_1}}}{d_2^{2(g_{X_3} - g_{X_1})} d_1^{2g_{X_3}}} \cdot |P(l_1, l_2, l_3) \cap l_3^*P(g_3)| \quad (3.22)$$

Como $|P(l_1, l_2, l_3) \cap l_2^*P(g_2)| \in \mathbb{Z}^+$ y $m.c.d.(d_i, d_j) = 1$ de (3.20) se tiene que

$$|P(l_1, l_2, l_3) \cap l_3^*P(g_3)| = a_3 d_1^{2(g_{X_3} - g_{X_2})} d_2^{2g_{X_3}} \quad a_3 \in \mathbb{Z}^+ \quad (3.23)$$

Usando el argumento anterior en (3.21) y (3.22) obtenemoslo siguiente

$$|P(l_1, l_2, l_3) \cap l_2^*P(g_2)| = a_2 d_3^{2(g_{X_2} - g_{X_1})} d_1^{2g_{X_2}} \quad a_2 \in \mathbb{Z}^+ \quad (3.24)$$

$$|P(l_1, l_2, l_3) \cap l_3^*P(g_3)| = a_1 d_2^{2(g_{X_3} - g_{X_1})} d_1^{2g_{X_3}} \quad a_1 \in \mathbb{Z}^+ \quad (3.25)$$

Sustituyendo (3.23) en (3.20), (3.24) en (3.21) y (3.25) en (3.22) se tienen las ecuaciones

$$|P(l_1, l_2, l_3) \cap l_2^*P(g_2)| = a_3 d_3^{2g_{X_2}} \quad (3.26)$$

$$|P(l_1, l_2, l_3) \cap l_1^*P(g_1)| = a_2 d_2^{2g_{X_1}} \quad (3.27)$$

$$|P(l_1, l_2, l_3) \cap l_1^*P(g_1)| = a_1 d_3^{2g_{X_1}} \quad (3.28)$$

Por lo tanto

$$\text{de (3.25) y (3.23)} \quad a_3 d_1^{2(g_{X_3} - g_{X_2})} d_2^{2g_{X_3}} = a_1 d_2^{2(g_{X_3} - g_{X_1})} d_1^{2g_{X_3}} \quad (3.29)$$

$$\text{de (3.26) y (3.24)} \quad a_3 d_3^{2g_{X_2}} = a_2 d_3^{2(g_{X_2} - g_{X_1})} d_1^{2g_{X_2}} \quad (3.30)$$

$$\text{de (3.27) y (3.28)} \quad a_2 d_2^{2g_{X_1}} = a_1 d_3^{2g_{X_1}} \quad (3.31)$$

Resolviendo para a_1 , a_2 y a_3 se tiene que

$$a_1 = c d_2^{2g_{X_1}} \quad a_2 = c d_3^{2g_{X_1}} \quad \text{y} \quad a_3 = c d_1^{2g_{X_2}} \quad \text{donde } c \in \mathbb{Z}^+. \quad (3.32)$$

lo anterior implica que

$$|P(l_1, l_2, l_3) \cap l_i^*P(g_i)| = c(d_j d_k)^{2g_{X_i}} \quad \text{para } \{i, j, k\} = \{1, 2, 3\} \quad (3.33)$$

La ecuación (2.25) implica

$$|K(L_{l_3^*P}(g_3))| = |K(L_{P(l_1, l_2)}) \cap l_3^*P(g_3)| \cdot |P(l_1, l_2, l_3) \cap l_3^*P(g_3)| \quad (3.34)$$

entonces, sustituyendo (3.33) para $i = 3$ en (3.34), se concluye que $c = 1$ y por lo tanto

$$\text{de (3.17)} \quad |K(L_{P(l_1, l_2, l_3)})| = d_1^{2(g_{X_2} + g_{X_3})} d_2^{2(g_{X_1} + g_{X_3})} d_3^{2(g_{X_1} + g_{X_2})} \quad (3.35)$$

$$|K(L_{P(l_1, l_2)} \cap l_3^* P(g_3))| = 1 \quad (3.36)$$

$$\text{de (3.33)} \quad |P(l_1, l_2, l_3) \cap l_i^* P(g_i)| = (d_j d_k)^{2g_{X_i}} \quad (3.37)$$

Observación 3.3.1: $|K(L_{P(l_i, l_j)} \cap l_k^* P(g_k))| = 1$

Supongamos que se tiene en siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} & & X & & \\ & & \downarrow h & & \\ & l_1 & X_{123} & l_3 & \\ & \swarrow f_1 & \downarrow f_2 & \searrow f_3 & \\ X_1 & & X_2 & & X_3 \\ & \swarrow g_1 & \downarrow g_2 & \searrow g_3 & \\ & & \mathbb{P}^1 & & \end{array} \quad (3.38)$$

donde el grado de h es d_k y $(l_i)^* = (f_i h)^*$ es inyectivo.

La idea es calcular el tipo de la polarización inducida por L en $P(l_1, l_2, l_3)$ utilizando (3.35).

Como

$$\begin{aligned} J(X_{123}) &= f_1^* J(X_1) + f_2^* P(g_2) + f_3^* P(g_3) + P(f_1, f_2, f_3) \\ J(X) &= l_1^* J(X_1) + l_2^* P(g_2) + l_3^* P(g_3) + P(l_1, l_2, l_3) \end{aligned}$$

Del diagrama (3.38) es claro que si $Z = f_1^* J(X_1) + f_2^* P(g_2) + f_3^* P(g_3)$ entonces $h^* Z$ es la subvariedad abeliana complementaria de $P(l_1, l_2, l_3)$ en $J(X)$, por lo tanto si L^{123} es la polarización canónica de $J(X_{123})$ y $L_{P(f_1, f_2, f_3)}^{123}$ es de tipo (a_1, \dots, a_s) entonces L_Z^{123} es de tipo

$$\left(\underbrace{1, \dots, 1}_{g_{X_1} + g_{X_2} + g_{X_3} - a_s}, a_1, \dots, a_s \right)$$

La proposición (3.2.1) implica que $L_{h^* Z}$ es de tipo

$$(d_k, \dots, d_k, d_k a_1, \dots, d_k a_s)$$

entonces se concluye que

$$\begin{aligned} |K(L_{P(l_1, l_2, l_3)})| &= d_k^{2(g_{X_1} + g_{X_2} + g_{X_3})} \cdot (a_1 \dots a_s)^2 \\ &= d_k^{2(g_{X_1} + g_{X_2} + g_{X_3})} d_1^{2(g_{X_2} + g_{X_3})} d_2^{2(g_{X_1} + g_{X_3})} d_3^{2(g_{X_1} + g_{X_2})} \end{aligned} \quad (3.39)$$

Observe que dado el diagrama (3.1) se tienen los siguientes resultados:

$$\text{de (3.18) y (3.19)} \quad |K(L_{P(l_1, l_2, l_3)})| = |K(L_{P(l_i, l_j)})| \cdot |K(L_{l_k^* P(g_k)})| \quad (3.40)$$

$$\text{de (2.25), (3.37), (3.35) y (3.18)} \quad |K(L_{P(l_i, l_j)} \cap P(l_1, l_2, l_3))| = |K(L_{P(l_i, l_j)})| \quad (3.41)$$

$$\text{de (3.36) y (2.27)} \quad K(L_{l_k^* P(g_k)}) = l_k^* P(g_k) \cap P(l_1, l_2, l_3) \quad (3.42)$$

$$\text{de (2.27) y (3.42)} \quad K(L_{l_k^* P(g_k)}) \subset K(L_{P(l_1, l_2, l_3)}) \quad (3.43)$$

$$\text{de (2.26) y (3.41)} \quad K(L_{P(l_i, l_j)}) \subset K(L_{P(l_1, l_2, l_3)}) \quad (3.44)$$

De (3.40), (3.43), (3.44) y la observación 3.3.1 se tiene la siguiente

Proposición 3.3.1: $K(L_{P(l_1, l_2, l_3)}) = K(L_{P(l_i, l_j)}) \oplus K(L_{l_k^* P(g_k)})$

Como $\text{m.c.d.}(d_i, d_j) = 1$, si $X = X_{123}$ la proposición 3.3.1 implica que $L_{P(l_1, l_2, l_3)}$ es de tipo

$$\left(\underbrace{1, \dots, 1}_{g_X - g_{X_1} - 2(g_{X_2} + g_{X_3})}, \underbrace{d_1, \dots, d_1}_{g_{X_2} - g_{X_1}}, \underbrace{d_1 d_2, \dots, d_1 d_2}_{g_{X_3} - g_{X_2}}, \underbrace{d_1 d_2 d_3, \dots, d_1 d_2 d_3}_{g_{X_1} + g_{X_2}} \right) \quad (3.45)$$

Dado el diagrama (3.38), la proposición 3.2.1y (3.45) implican que $L_{P(l_1, l_2, l_3)}$ es de tipo

$$\left(\underbrace{1, \dots, 1}_{g_X - 2(g_{X_1} + g_{X_2} + g_{X_3})}, \underbrace{d_k, \dots, d_k}_{g_{X_1}}, \underbrace{d_k d_1, \dots, d_k d_1}_{g_{X_2} - g_{X_1}}, \underbrace{d_k d_1 d_2, \dots, d_k d_1 d_2}_{g_{X_3} - g_{X_2}}, \underbrace{d_k d_1 d_2 d_3, \dots, d_k d_1 d_2 d_3}_{g_{X_1} + g_{X_2}} \right)$$

por lo que en este caso es evidente que no pueden haber variedades de Prym-Tyurin ya de haberlas se tendría que $g_{X_1} = 0$ lo cual no es posible.

Por lo tanto, bajo las hipótesis de la definición 3.1.1, si $X = X_{123}$, $\text{m.c.d.}(d_i, d_j) = 1$, $g_{X_1} = g_{X_2} = g_{X_3} = g_0$ y $g_X = 5g_0$, entonces $P(l_1, l_2, l_3)$ es Prym-Tyurin de exponente $d_1 d_2 d_3$ en $J(X)$. Sin embargo obtener una Prym-Tyurin de éste modo tampoco es posible ya que $g_{X_{123}} > 5g_0$.

4. LA VARIEDAD $P(L_1, \dots, L_N)$

En el capítulo anterior se definió la variedad $P(l_1, l_2, l_3)$ para 3 cubrientes; ¿Se puede generalizar la definición a n cubrientes? La respuesta es sí.

4.1 Definición de $P(l_1, \dots, l_n)$

Sean $l_i : X_{1\dots n} \rightarrow X_i$ y $g_i : X_i \rightarrow Y$ para $i = 1, \dots, n$ morfismos de curvas suaves proyectivas tales que g_i y g_j no factorizan vía un morfismo $Y^{ij} \rightarrow Y$ de grado $d \geq 2$ y supongamos que se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & X_{1\dots n} & & & \\
 & \swarrow l_1 & & \searrow l_n & & & \\
 X_1 & & & & & & X_n \\
 & \swarrow l_2 & & \swarrow l_{n-1} & & & \\
 & X_2 & & \dots & & & X_{n-1} \\
 & \swarrow g_2 & & \swarrow g_{n-1} & & & \\
 & & & Y & & & \\
 & \swarrow g_1 & & \swarrow g_n & & &
 \end{array} \tag{4.1}$$

Definición 4.1.1: Se define la variedad $(P(l_1, \dots, l_n), H)$ como la subvariedad abeliana complementaria de $l_i^*P(g_i)$ en $P(l_1, \dots, l_{i-1}, l_{i+1}, \dots, l_n)$, donde H es la polarización inducida por la polarización canónica principal L de $J(X_{1\dots n})$ en $P(l_1, \dots, l_n)$.

Veamos por inducción sobre n que $P(l_1, \dots, l_n)$ está bien definida.

En la sección 2 se probó que $P(l_1, l_2, l_3)$ está bien definida. Supongamos que $P(l_1, \dots, l_{k-1})$ está bien definida, es decir

$$P(l_1, \dots, l_{i-1}, l_{i+1}, \dots, l_{k-1}) = {}_i l_i^* P(g_i) + P(l_1, \dots, l_{k-1}) \tag{4.2}$$

Sea P_i la subvariedad abeliana complementaria de $l_i^*P(g_i)$ en $P(l_1, \dots, l_{i-1}, l_{i+1}, \dots, l_k)$ esto es

$$P(l_1, \dots, l_{i-1}, l_{i+1}, \dots, l_k) = {}_i l_i^* P(g_i) + P_i \tag{4.3}$$

Es suficiente mostrar que $P_1 = \dots = P_k$.

Sea $\{i, j\} \subset \{1, \dots, k\}$ y $m \in \{1, \dots, k\} \setminus \{i, j\}$. Sea $\{i_1, \dots, i_k\} = \{1, \dots, k\}$ con $i_1 = m$, $i_{k-1} = i$ y $i_k = j$.

Por hipótesis de inducción se tienen las isogenias

$$\begin{aligned}
 l_{i_1}^* J(X_{i_1}) \times l_{i_2}^* P(g_{i_2}) \times \dots \times l_{i_{k-2}}^* P(g_{i_{k-2}}) \times P(l_{i_1}, \dots, l_{i_{k-2}}) &\rightarrow \dots \\
 &\rightarrow l_{i_1}^* J(X_{i_1}) \times P(g_{i_1}) \rightarrow J(X_{1\dots n}) \tag{4.4}
 \end{aligned}$$

además, si $A = l_{i_1}^* J(X_{i_1}) \times l_{i_2}^* P(g_{i_2}) \times \dots \times l_{i_{k-2}}^* P(g_{i_{k-2}})$ de (4.4) y (4.2) se tienen las isogenias

$$\begin{aligned}
 A \times l_{i_{k-1}}^* P(g_{i_{k-1}}) \times P(l_{i_1}, \dots, l_{i_{k-2}}, l_{i_{k-1}}) &\rightarrow A \times P(l_{i_1}, \dots, l_{i_{k-2}}) \rightarrow \dots \rightarrow l_{i_1}^* J(X_{i_1}) \times P(g_{i_1}) \rightarrow J(X_{1\dots n}) \\
 A \times l_{i_k}^* P(g_{i_k}) \times P(l_{i_1}, \dots, l_{i_{k-2}}, l_{i_k}) &\rightarrow A \times P(l_{i_1}, \dots, l_{i_{k-2}}) \rightarrow \dots \rightarrow l_{i_1}^* J(X_{i_1}) \times P(g_{i_1}) \rightarrow J(X_{1\dots n})
 \end{aligned}$$

Sean

$$\begin{aligned} A_1 &= A \times l_{i_{k-1}}^* P(g_{i_{k-1}}) \times P(l_{i_1}, \dots, l_{i_{k-2}}, l_{i_{k-1}}) \\ A_2 &= A \times l_{i_k}^* P(g_{i_k}) \times P(l_{i_1}, \dots, l_{i_{k-2}}, l_{i_k}) \end{aligned}$$

entonces por definición de variedades de Prym y (4.3) se tienen las isogenias

$$\begin{aligned} A \times l_{i_{k-1}}^* P(g_{i_{k-1}}) \times l_{i_k}^* P(g_{i_k}) \times P_{i_k} &\rightarrow A_1 \rightarrow \dots \rightarrow l_{i_1}^* J(X_{i_1}) \times P(g_{i_1}) \rightarrow J(X_1 \dots n) \\ A \times l_{i_k}^* P(g_{i_k}) \times l_{i_{k-1}}^* P(g_{i_{k-1}}) \times P_{i_{k-1}} &\rightarrow A_2 \rightarrow \dots \rightarrow l_{i_1}^* J(X_{i_1}) \times P(g_{i_1}) \rightarrow J(X_1 \dots n) \end{aligned}$$

Luego, si Z denota la imagen de $A \times l_{i_{k-1}}^* P(g_{i_{k-1}}) \times l_{i_k}^* P(g_{i_k})$ en $J(X_{1\dots n})$ la aplicación suma induce las isogenias

$$Z \times P_{i_{k-1}} \longrightarrow J(X_{1\dots n}) \quad \text{y} \quad Z \times P_{i_k} \longrightarrow J(X_{1\dots n}) \quad (4.5)$$

Como las descomposiciones de los espacios tangentes correspondientes son ortogonales con respecto a la forma hermitiana asociada a la polarización canónica de $J(X_{1\dots n})$ se concluye que $P_{i_{k-1}} = P_{i_k}$, lo cual implica $P_i = P_j \forall i \neq j \in \{1, \dots, k\}$ y por lo tanto $P_1 = \dots = P_k$.

Proposición 4.1.1: $P(l_1, \dots, l_n) = (P(l_1) \cap \dots \cap P(l_n))^0$

Demostración: (Por inducción sobre n)

Supongamos que la afirmación es válida para $n = k - 1$, es decir:

$$\begin{aligned} P(l_1) \cap \dots \cap P(l_{k-1}) &= P(l_1, l_2) \cap \dots \cap P(l_1, l_{k-1}) + K && \text{donde } K \text{ es un conjunto finito} \\ P(l_1, \dots, l_{k-1}) + K' &= P(l_1, l_2) \cap \dots \cap P(l_1, l_{k-1}) && \text{donde } K' \text{ es un conjunto finito} \end{aligned}$$

Por hipótesis de inducción se tienen las ecuaciones:

$$\begin{aligned} P(l_1) \cap \dots \cap P(l_{k-2}) \cap P(l_k) &= P(l_1, l_2) \cap \dots \cap P(l_1, l_{k-2}) \cap P(l_1, l_k) + K_2 \\ P(l_1) \cap \dots \cap P(l_{k-1}) &= P(l_1, l_2) \cap \dots \cap P(l_1, l_{k-1}) + K_1 \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} P(l_1, \dots, l_{k-1}) + K'_1 &= P(l_1, l_2) \cap \dots \cap P(l_1, l_{k-1}) \\ P(l_1, \dots, l_{k-2}, l_k) + K'_2 &= P(l_1, l_2) \cap \dots \cap P(l_1, l_{k-2}) \cap P(l_1, l_k) \end{aligned} \quad (4.7)$$

Del lema 2.6.1 y las ecuaciones en (4.6) y (4.7) respectivamente se sigue

$$P(l_1, \dots, l_{k-1}) \cap P(l_1, \dots, l_{k-2}, l_k) + K' = P(l_1, l_2) \cap \dots \cap P(l_1, l_k) \quad (4.8)$$

$$P(l_1) \cap \dots \cap P(l_k) = P(l_1, l_2) \cap \dots \cap P(l_1, l_k) + K \quad (4.9)$$

además, por definición

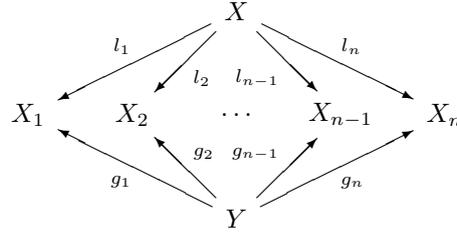
$$\begin{aligned} P(l_1, \dots, l_{k-1}) &= l_k^* P(g_k) + P(l_1, \dots, l_k) \\ P(l_1, \dots, l_{k-2}, l_k) &= l_{k-1}^* P(g_{k-1}) + P(l_1, \dots, l_k) \end{aligned} \quad (4.10)$$

entonces del lema 2.6.1 y (4.10)

$$\begin{aligned} P(l_1, \dots, l_k) &= (P(l_1, \dots, l_{k-1}) \cap P(l_1, \dots, l_{k-2}, l_k))^0 \\ \text{de (4.8)} &= (P(l_1, l_2) \cap \dots \cap P(l_1, l_k))^0 \\ \text{de (4.9)} &= (P(l_1) \cap \dots \cap P(l_k))^0 \end{aligned}$$

■

Observación 4.1.1: Esta definición es válida para el diagrama



cuando X factoriza por $X_{1\dots n}$ y se tienen las condiciones del diagrama (4.1).

Proposición 4.1.2:

$$\dim P(l_1, \dots, l_n) = [d_1 \cdots d_n - (d_1 + \cdots + d_n) + (n-1)][g_Y - 1] + \frac{1}{2}[\omega_{l_i} - \sum_{j \neq i} \omega_{g_j} + (\prod_{j \neq i} d_j - 1)\omega_{g_i}].$$

Demostración: La igualdad se obtiene de las ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} \dim P(l_1, \dots, l_n) &= g_X - g_{X_1} - \cdots - g_{X_n} + (n-1)g_Y \\ g_X &= 1 + d_1 \cdots d_n (g_Y - 1) + \frac{1}{2}(\prod_{j \neq i} \omega_{g_j} + \omega_{l_i}) \\ g_{X_i} &= 1 + d_i (g_Y - 1) + \frac{1}{2}\omega_{g_i} \end{aligned}$$

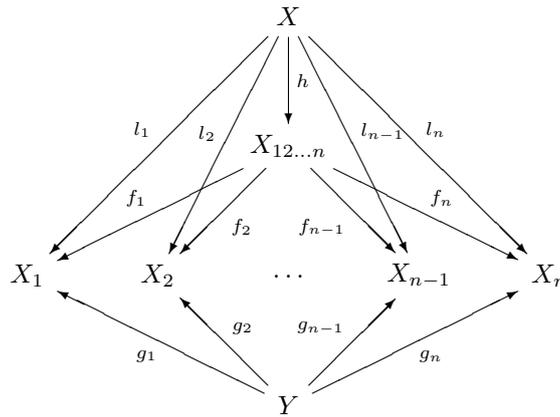
■

4.2 La polarización de $P(l_1, \dots, l_n)$

Bajo las condiciones de la definición 4.1 se tienen los siguientes resultados:

Proposición 4.2.1: Sea $h : X \rightarrow X_{12\dots n}$ un morfismo de curvas suaves proyectivas de grado d_{n+1} . Si Z es la subvariedad abeliana complementaria de $P(f_1, \dots, f_n)$ en $J(X_{12\dots n})$ entonces $P(l_1, \dots, l_n)$ es la subvariedad abeliana complementaria de $h^*(Z)$ en $J(X)$.

Demostración: Dado el diagrama:



por definición de variedades de Prym se tiene que

$$J(X_{12\dots n}) =_i f_1^* J(X_1) + f_2^* P(g_2) + \cdots + f_n^* P(g_n) + P(f_1, \dots, f_n) \quad (4.11)$$

$$J(X) =_i l_1^* J(X_1) + l_2^* P(g_2) + \cdots + l_n^* P(g_n) + P(l_1, \dots, l_n) \quad (4.12)$$

De (4.11) se tiene que $Z = f_1^* J(X_1) + f_2^* P(g_2) + \dots + f_n^* P(g_n)$ entonces

$$h^*(Z) = h^* f_1^* J(X_1) + h^* f_2^* P(g_2) + \dots + h^* f_n^* P(g_n).$$

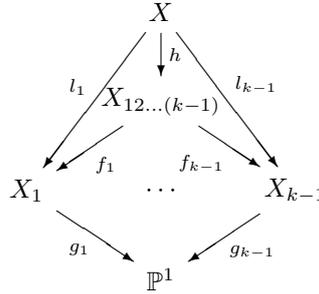
El resultado se sigue de (4.12). ■

Proposición 4.2.2: *Bajo las condiciones de la definición (4.1.1). Si $g_{X_1} \leq \dots \leq g_{X_n}$, $X = X_1 \times \dots \times X_n$ y $\deg(g_i) = d_i$ es tal que m.c.d. $(d_i, d_j) = 1$ entonces*

$$|K(L_{P(l_1, \dots, l_n)})| = d_1^{2(g_{X_2} + \dots + g_{X_n})} \dots d_i^{2(g_{X_1} + \dots + g_{X_{i-1}} + g_{X_{i+1}} + \dots + g_{X_n})} \dots \cdot d_n^{2(g_{X_1} + \dots + g_{X_{n-1}})} \quad (4.13)$$

Demostración: (Por inducción sobre n .)

Supongamos que la afirmación es válida para $n = k - 1$, entonces, dado el diagrama



se tiene

$$|K(L_{P(f_1, \dots, f_{k-1})})| = d_1^{2(g_{X_2} + \dots + g_{X_{k-1}})} \dots d_i^{2(g_{X_1} + \dots + g_{X_{i-1}} + g_{X_{i+1}} + \dots + g_{X_{k-1}})} \dots \cdot d_{k-1}^{2(g_{X_1} + \dots + g_{X_{k-2}})} \quad (4.14)$$

Sea Z la subvariedad abeliana complementaria de $P(f_1, \dots, f_{k-1})$ en $J(X_{12\dots(k-1)})$, por la proposición (4.2.1) se tiene que h^*Z es la subvariedad abeliana complementaria de $P(l_1, \dots, l_{k-1})$ in $J(X)$. Si $L^{12\dots(k-1)}$ es la polarización canónica de $J(X_{12\dots(k-1)})$ y $L_{P(f_1, \dots, f_{k-1})}^{12\dots(k-1)}$ es de tipo (a_1, \dots, a_r) entonces $L_Z^{12\dots(k-1)}$ es de tipo $(\underbrace{1, \dots, 1}_{g_{X_1} + \dots + g_{X_{k-1}} - r}, a_1, \dots, a_r)$. Por lo tanto, la proposición (3.2.1) implica que

L_{h^*Z} es de tipo $(d_k, \dots, d_k, d_k a_1, \dots, d_k a_r)$ lo cual implica que $L_{P(l_1, \dots, l_{k-1})}$ es de tipo $(1, \dots, 1, d_k, \dots, d_k, d_k a_1, \dots, d_k a_r)$. Por hipótesis de inducción se concluye que

$$|K(L_{P(l_1, \dots, l_{k-1})})| = d_k^{2(g_{X_1} + \dots + g_{X_{k-1}})} \cdot |K(L_{P(f_1, \dots, f_{k-1})})| \quad (4.15)$$

Como $P = P(l_1, \dots, l_k)$ es la subvariedad abeliana complementaria de $l_i^* P(g_i)$ en $P_i = P(l_1, \dots, l_{i-1}, l_{i+1}, \dots, l_k)$ $i = 1, \dots, k$ se tiene lo siguiente

$$|K(L_P)| \cdot |K(L_{l_i^* P(g_i)})| = |P \cap l_i^* P(g_i)|^2 \cdot |K(L_{P_i})| \quad i=1, \dots, k-1 \quad (4.16)$$

$$|K(L_P)| \cdot |K(L_{l_k^* P(g_k)})| = |P \cap l_k^* P(g_k)|^2 \cdot |K(L_{P_k})| \quad (4.17)$$

Despejando $K(L_{l_i^* P(g_i)})$ en (4.16) y sustituyendo en (4.17) se tiene que

$$\begin{aligned} |P \cap l_i^* P(g_i)| &= \frac{(d_1 \dots d_{i-1} d_{i+1} \dots d_k)^{2g_{X_i}}}{(d_1 \dots d_{i-1} d_i d_{i+1} \dots d_{k-1})^{2g_{X_k}}} \cdot |P \cap l_k^* P(g_k)| \\ &= \frac{d_k^{2g_{X_i}}}{d_i^{2g_{X_k}} (d_1 \dots d_{i-1} d_{i+1} \dots d_{k-1})^{2(g_{X_k} - g_{X_i})}} \cdot |P \cap l_k^* P(g_k)| \end{aligned} \quad (4.18)$$

por lo tanto

$$|P \cap l_k^* P(g_k)| = a_i d_i^{2g_{X_k}} (d_1 \cdots d_{i-1} d_{i+1} \cdots d_{k-1})^{2(g_{X_k} - g_{X_i})} \quad (4.19)$$

donde $a_i \in \mathbb{Z}^+$.

Lema 4.2.1: $a_1 = c (d_2 \cdots d_{k-1})^{2g_{X_1}}$.

Demostración: Comparando las ecuaciones obtenidas al sustituir $i = 1, 2$ en (4.19) se tiene que

$$a_1 \cdot \frac{(d_3 \cdots d_{k-1})^{2(g_{X_2} - g_{X_1})}}{d_2^{2g_{X_1}}} \cdot d_1^{2g_{X_2}} = a_2$$

por lo tanto $a_1 = c_1 d_2^{2g_{X_1}}$ donde $c_1 \in \mathbb{Z}^+$.

Supongamos que $a_1 = c_{s-1} (d_2 \cdots d_s)^{2g_{X_1}}$ para $2 \leq s < k-1$. De la hipótesis de inducción y la ecuación (4.19), para $i = s+1$ se tiene que

$$c_{s-1} \cdot \frac{(d_1 \cdots d_s)^{2g_{X_{s+1}}} (d_{s+2} \cdots d_{k+1})^{2(g_{X_{s+1}} - g_{X_1})}}{d_{s+1}^{2g_{X_1}}} = a_s$$

entonces $c_{s-1} = c_s d_{s+1}^{2g_{X_1}}$ para alguna $c_s \in \mathbb{Z}^+$, por lo que

$$a_1 = c_{s-1} (d_2 \cdots d_s)^{2g_{X_1}} = c_s (d_2 \cdots d_{s+1})^{2g_{X_1}}.$$

El lema se sigue de sustituir $s = k-2$ en la ecuación anterior. ■

Sustituyendo a_1 en el polinomio que se obtiene al sustituir $i = 1$ en (4.19) se tiene que

$$|P \cap l_k^* P(g_k)| = c (d_1 \cdots d_{k-1})^{2g_{X_k}} \quad (4.20)$$

Como $|K(L_{l_k^* P(g_k)})| = |K(L_{P_k}) \cap l_k^* P(g_k)| \cdot |P \cap l_k^* P(g_k)|$ entonces $c = 1$ y por lo tanto

$$|P \cap l_k^* P(g_k)| = (d_1 \cdots d_{k-1})^{2g_{X_k}} \quad (4.21)$$

La afirmación se sigue de sustituir (4.21) en (4.17). ■

Corolario 4.2.1: Si $h : \rightarrow X_{12\dots n}$ es un morfismo de curvas suaves proyectivas de grado d_h entonces

$$|K(L_{P(l_1, \dots, l_n)})| = d_h^{\sum_{i=1}^n g_{X_i}} \cdot \prod_{i=1}^n d_i^{2(\sum_{j \neq i} g_{X_j})}$$

Corolario 4.2.2: $|K(L_{P(l_1, \dots, l_n)})| = |K(L_{P(l_1, \dots, l_{i-1}, l_{i+1}, \dots, l_n)})| \cdot |K(L_{l_i^* P(g_i)})|$

Corolario 4.2.3: $|P(l_1, \dots, l_n) \cap l_i^* P(g_i)| = (d_1 \cdots d_{i-1} d_{i+1} \cdots d_n)^{2g_{X_i}}$

Corolario 4.2.4: $K(L_{l_i^* P(g_i)}) = P(l_1, \dots, l_n) \cap l_i^* P(g_i)$

Corolario 4.2.5: $|K(L_{P(l_1, \dots, l_{i-1}, l_{i+1}, \dots, l_n)}) \cap P(l_1, \dots, l_n)| = |K(L_{P(l_1, \dots, l_{i-1}, l_{i+1}, \dots, l_n)})|$

Como

$$\begin{aligned} K(L_{l_i^* P(g_i)}) &\subset K(L_{P(l_1, \dots, l_n)}) && \text{por (2.27) y (4.2.4)} \\ K(L_{P(l_1, \dots, l_{i-1}, l_{i+1}, \dots, l_j)}) &\subset K(L_{P(l_1, \dots, l_n)}) && \text{por (2.26) y (4.2.5)} \\ |K(L_{P(l_1, \dots, l_{i-1}, l_{i+1}, \dots, l_n)}) \cap l_i^* P(g_i)| &= 1 && \text{por (2.25)} \end{aligned}$$

entonces se tiene el siguiente resultado:

Proposición 4.2.3: $K(L_{P(l_1, \dots, l_n)}) = K(L_{P(l_1, \dots, l_{i-1}, l_{i+1}, \dots, l_n)}) \oplus K(L_{l_i^* P(g_i)})$

La proposición anterior implica que para $X = X_{1\dots n}$, $L|_{P(l_1, \dots, l_n)}$ es de tipo

$$\left(\underbrace{1, \dots, 1}_{g_{X_{1\dots n}} - g_{X_1} - 2(\sum_{i=2}^n g_{X_i})}, \underbrace{d_1, \dots, d_1}_{g_{X_2} - g_{X_1}}, \underbrace{d_1 d_2, \dots, d_1 d_2, \dots}_{g_{X_3} - g_{X_2}}, \underbrace{\prod_{i=1}^{n-1} d_i, \dots, \prod_{i=1}^{n-1} d_i}_{g_{X_n} - g_{X_{n-1}}}, \underbrace{\prod_{i=1}^n d_i, \dots, \prod_{i=1}^n d_i}_{\sum_{i=1}^{n-1} g_{X_i}} \right)$$

por lo que $P(l_1, \dots, l_n)$ es Prym-Tyurin de exponente $d_1 \cdots d_n$ si y sólo si $g_{X_1} = \cdots = g_{X_n} = g_0$ y $g_{X_{1\dots n}} = g_0 + 2(n-1)g_0 = (2n-1)g_0$, sin embargo, nuevamente $g_{X_{1\dots n}} > (2n-1)g_0$, por lo que no es posible obtener variedades de Prym-Tyurin de este modo.

5. VARIEDAD DE PRYM DE 3 CUBRIENTES

La variedad estudiada en el capítulo 3 no tiene posibilidad alguna de ser la variedad de Prym de 3 cubrientes puesto que al término de su estudio nos dimos cuenta que ésta se descompone en subvariedades más pequeñas.

5.1 Definición de P_{123}

Dado el diagrama (1.1), denotemos por P_{ij} a la variedad de Prym $P(h_j^i, h_i^j) \subset J(X_{ij})$. Por definición de variedades de Prym tenemos que

$$J(X_{123}) =_i (h_{12}^3)^* J(X_{12}) + P(h_{12}^3) \quad \text{y} \quad J(X_{12}) =_i (h_1^2)^* J(X_1) + P(h_1^2).$$

La definición de variedades de Prym de pares de cubrientes implica

$$\begin{aligned} P(h_{12}^3) &= (h_{23}^1)^* P(h_2^3) + P(h_{12}^3, h_{23}^1) \\ P(h_1^2) &= (h_2^1)^* P(g_2) + P_{12} \\ P(h_2^3) &= (h_3^2)^* P(g_3) + P_{23}. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Entonces tenemos

$$J(X_{123}) =_i (h_{12}^3)^* J(X_{12}) + (h_{23}^1)^* P(h_2^3) + P(h_{12}^3, h_{23}^1) \tag{5.2}$$

$$J(X_{12}) =_i (h_1^2)^* J(X_1) + (h_2^1)^* P(g_2) + P_{12}. \tag{5.3}$$

Las ecuaciones (5.3) y (5.1) implican

$$(h_{12}^3)^* J(X_{12}) =_i (h_{12}^3)^* (h_1^2)^* J(X_1) + (h_{12}^3)^* (h_2^1)^* P(g_2) + (h_{12}^3)^* P_{12} \tag{5.4}$$

$$(h_{23}^1)^* P(h_2^3) =_i (h_{23}^1)^* (h_3^2)^* P(g_3) + (h_{23}^1)^* P_{23}. \tag{5.5}$$

Sustituyendo (5.4) y (5.5) en (5.2) tenemos

$$J(X_{123}) =_i l^* J(Y) + l_1^* P(g_1) + l_2^* P(g_2) + l_3^* P(g_3) + (h_{12}^3)^* P_{12} + (h_{23}^1)^* P_{23} + P(h_{12}^3, h_{23}^1) \tag{5.6}$$

donde $l_i = h_i^j \circ h_{ij}^k$ y $l = g_i \circ l_i$ para $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$.

Análogamente para

$$J(X_{123}) =_i (h_{12}^3)^* J(X_{12}) + P(h_{12}^3) =_i (h_{12}^3)^* J(X_{12}) + (h_{13}^2)^* P(h_1^3) + P(h_{12}^3, h_{13}^2)$$

$$J(X_{123}) =_i (h_{23}^1)^* J(X_{23}) + P(h_{23}^1) =_i (h_{23}^1)^* J(X_{23}) + (h_{13}^2)^* P(h_1^3) + P(h_{23}^1, h_{13}^2)$$

tenemos

$$J(X_{123}) =_i l^* J(Y) + l_1^* P(g_1) + l_2^* P(g_2) + l_3^* P(g_3) + (h_{12}^3)^* P_{12} + (h_{13}^2)^* P_{13} + P(h_{12}^3, h_{13}^2)$$

$$J(X_{123}) =_i l^* J(Y) + l_1^* P(g_1) + l_2^* P(g_2) + l_3^* P(g_3) + (h_{23}^1)^* P_{23} + (h_{13}^2)^* P_{13} + P(h_{23}^1, h_{13}^2).$$

Además, como

$$P(h_{12}^3) =_i l_3^* P(g_3) + (h_{13}^2)^* P_{13} + P(h_{12}^3, h_{13}^2)$$

$$P(h_{23}^1) =_i l_1^* P(g_1) + (h_{13}^2)^* P_{13} + P(h_{23}^1, h_{13}^2)$$

entonces

$$(h_{13}^2)^*P_{13} \subset P(h_{12}^3) \cap P(h_{23}^1).$$

Por lo que

$$(h_{13}^2)^*P_{13} \subset (P(h_{12}^3) \cap P(h_{23}^1))^0 = P(h_{12}^3, h_{23}^1).$$

Procediendo de manera similar, para $(h_{12}^3)^*P_{12}$ y $(h_{23}^1)^*P_{23}$ tenemos

$$(h_{12}^3)^*P_{12} \subset P(h_{23}^1, h_{13}^2)$$

$$(h_{23}^1)^*P_{23} \subset P(h_{13}^2, h_{12}^3).$$

Sea P_i la subvariedad abeliana complementaria de $(h_{jk}^i)^*P_{jk}$ en $P(h_{ij}^k, h_{ik}^j)$, entonces

$$\begin{aligned} J(X_{123}) &= {}_i l^* J(Y) + l_1^* P(g_1) + l_2^* P(g_2) + l_3^* P(g_3) + (h_{12}^3)^* P_{12} + (h_{23}^1)^* P_{23} + (h_{13}^2)^* P_{13} + P_2 \\ &= {}_i l^* J(Y) + l_1^* P(g_1) + l_2^* P(g_2) + l_3^* P(g_3) + (h_{12}^3)^* P_{12} + (h_{13}^2)^* P_{13} + (h_{23}^1)^* P_{23} + P_1 \quad (5.7) \\ &= {}_i l^* J(Y) + l_1^* P(g_1) + l_2^* P(g_2) + l_3^* P(g_3) + (h_{23}^1)^* P_{23} + (h_{13}^2)^* P_{13} + (h_{12}^3)^* P_{12} + P_3. \end{aligned}$$

Sea $A = l^* J(Y) \times l_1^* P(g_1) \times l_2^* P(g_2) \times l_3^* P(g_3) \times (h_{12}^3)^* P_{12} \times (h_{13}^2)^* P_{13} \times (h_{23}^1)^* P_{23}$, si Z_A denota la imagen de A in $J(X_{123})$, la aplicación suma induce isogenias

$$Z_A \times P_2 \rightarrow J(X_{123}), \quad Z_A \times P_1 \rightarrow J(X_{123}) \quad \text{y} \quad Z_A \times P_3 \rightarrow J(X_{123}).$$

Como la descomposición de los espacios tangentes correspondientes son ortogonales con respecto a la forma hermitiana asociada a la polarización canónica de $J(X_{123})$ se concluye que $P_1 = P_2 = P_3 = P_{123}$ y por lo tanto se tiene la siguiente

Definición 5.1.1: Dado el diagrama (1.1), definimos la variedad de Prym de 3 cubrientes (P_{123}, H) como la subvariedad abeliana complementaria de $(h_{jk}^i)^*P_{jk}$ en $P(h_{ij}^k, h_{ik}^j)$ donde H es la polarización canónica inducida por la polarización canónica principal L de $J(X_{123})$ en P_{123} .

Proposición 5.1.1: Bajo las condiciones del diagrama (1.1) tenemos

$$J(X_{123}) = {}_i l^* J(Y) + l_1^* P(g_1) + l_2^* P(g_2) + l_3^* P(g_3) + (h_{12}^3)^* P_{12} + (h_{23}^1)^* P_{23} + (h_{13}^2)^* P_{13} + P_{123}.$$

Demostración: El resultado de sigue de (5.6) y la definición 5.1.1. ■

El resultado anterior nos muestra que, como se mencionó al inicio de este capítulo, $P(l_1, l_2, l_3)$ se descompone en $(h_{12}^3)^* P_{12} + (h_{23}^1)^* P_{23} + (h_{13}^2)^* P_{13} + P_{123}$ cuando $X = X_{123}$. Si la curva X factoriza por X_{123} via un morfismo h , es evidente que se tiene una descomposición análoga.

La siguiente proposición nos da una definición equivalente de P_{123} .

Proposición 5.1.2: $P_{123} = (P(h_{12}^3) \cap P(h_{13}^2) \cap P(h_{23}^1))^0$

Demostración: La proposición 2.6.4 y la definición 5.1.1 implican

$$(P(h_{23}^1) \cap P(h_{13}^2))^0 = P(h_{23}^1, h_{13}^2) = {}_i (h_{12}^3)^* P_{12} + P_{123} \quad (5.8)$$

$$(P(h_{12}^3) \cap P(h_{23}^1))^0 = P(h_{12}^3, h_{23}^1) = {}_i (h_{13}^2)^* P_{13} + P_{123} \quad (5.9)$$

Del lema 2.6.1 basta probar $(h_{12}^3)^* P_{12} \cap (h_{13}^2)^* P_{13}$ es finito, lo cual se sigue de la proposición 5.1.1. ■

Observación 5.1.1: Dada la definición de P_{123} se sigue

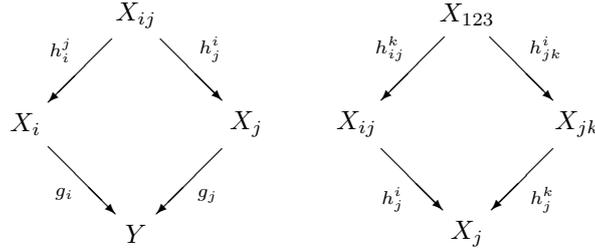
$$P(l_1, l_2, l_3) = {}_i (h_{12}^3)^* P_{12} + (h_{23}^1)^* P_{23} + (h_{13}^2)^* P_{13} + P_{123}.$$

5.2 La dimensión de P_{123}

Lema 5.2.1: *Supongamos que el lugar de ramificación de g_i y g_j son disjuntos, entonces*

$$\begin{aligned} \deg(h_i^j) &= d_j & \deg(h_{ij}^k) &= d_k \\ \omega_{h_i^j} &= d_i \omega_{g_j} & \omega_{h_{ij}^k} &= d_i d_j \omega_{g_k} \end{aligned}$$

Demostración: El resultado se sigue de observar que $X_{ij} = X_i \times_Y X_j$ and $X_{123} = X_{ij} \times_{X_j} X_{jk}$ en los siguientes diagramas



■

Lema 5.2.2: $g_{X_{123}} = 1 + d_1 d_2 d_3 (g_Y) + \frac{1}{2} (d_1 d_2 \omega_{g_3} + d_1 d_3 \omega_{g_2} + d_2 d_3 \omega_{g_1})$

Demostración: La fórmula de Riemann-Hurwitz y el lema 5.2.1 implican

$$g_{X_{ij}} = 1 + d_i d_j (g_Y - 1) + \frac{1}{2} (d_j \omega_{g_i} + d_i \omega_{g_j}) \quad (5.10)$$

$$g_{X_{123}} = 1 + d_i (g_{X_{ij}} - 1) + \frac{1}{2} \omega_{h_{ij}^k} \quad (5.11)$$

El resultado se sigue de reemplazar (5.10) en (5.11). ■

Teorema 5.2.1: *Si el lugar de ramificación de g_i y g_j son disjuntos, entonces*

$$\begin{aligned} \dim P_{123} &= (d_1 - 1)(d_2 - 1)(d_3 - 1)(g_Y - 1) + \frac{1}{2} ((d_1 - 1)(d_2 - 1) \omega_{g_3} \\ &\quad + (d_1 - 1)(d_3 - 1) \omega_{g_2} + (d_2 - 1)(d_3 - 1) \omega_{g_1}). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Demostración: La proposición 5.1.1 implica que

$$\dim P_{123} = g_{X_{123}} - g_{X_{12}} - g_{X_{13}} - g_{X_{23}} + g_{X_1} + g_{X_2} + g_{X_3} - g_Y \quad (5.13)$$

Usar (5.10), lema 5.2.2 y la ecuación $g_{X_i} = 1 + d_i (g_Y - 1) + \frac{1}{2} \omega_{g_i}$ en (5.13) implica el resultado. ■

Corolario 5.2.1: $\dim P_{123} > 0$.

Demostración: Recordar la ecuación (5.12) en el Teorema 5.2.1. El caso $g_Y \geq 2$ obviamente implica el resultado.

Caso $g_Y = 1$. Como $g_{X_i} \geq 1$ entonces $\omega_{g_i} \geq 2d_i > 0$ y por lo tanto se concluye lo esperado.

Caso $g_Y = 0$. El resultado se sigue de observar que $\omega_{g_i} \geq 2d_i > 2(d_i - 1)$. ■

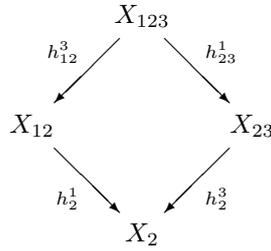
5.3 El orden de $K(L_{P_{123}})$

Nos interesa saber cuando P_{123} es Prym-Tyurin. Para esto es necesario calcular el tipo de $L_{P_{123}}$. EL primer paso para ello es calcular el orden de $K(L_{P_{123}})$, pero antes es necesario calcular el orden de $K(L_{P(h_{jk}^i, h_{jk}^j)})$. Consideremos el caso en que $g_Y = 0$. Sin pérdida de generalidad calculamos $|K(L_{P(h_{23}^1, h_{12}^3)})|$.

Teorema 5.3.1: *Si m.c.d.(d_i, d_j) = 1 para $i, j \in \{1, 2, 3\}$ y $g_Y = 0$ entonces*

1. $|K(L_{P(h_{jk}^i, h_{jk}^j)})| = d_i^{2(g_{X_{jk}} - g_{X_k})} d_j^{2(g_{X_{ik}} - g_{X_k})}$.
2. $|K(L_{P_{123}})| = d_1^{2(g_{X_{23}} - g_{X_2} - g_{X_3})} d_2^{2(g_{X_{13}} - g_{X_1} - g_{X_3})} d_3^{2(g_{X_{12}} - g_{X_1} - g_{X_2})}$.

Demostración: Dado el diagrama (1.1), tenemos el siguiente sub-diagrama



La definición de variedad de Prym de un par de cubrientes implica

$$P(h_{12}^3) = (h_{23}^1)^* P(h_2^3) + P(h_{12}^3, h_{23}^1).$$

Como

$$\begin{array}{ll}
 L_{(h_{23}^1)^* P(h_2^3)} & \text{es de tipo } \underbrace{(d_1, \dots, d_1)}_{g_{X_{23}}} \underbrace{(d_1 d_3, \dots, d_1 d_3)}_{-2g_{X_2}} & \text{proposición 3.2.1 (5.14)} \\
 L_{P(h_{12}^3)} & \text{es de tipo } (1, \dots, 1, \underbrace{d_3, \dots, d_3}_{g_{X_{12}}})
 \end{array}$$

de (2.24) y (2) tenemos

$$|K(L_{P(h_{23}^1, h_{12}^3)})| = \left(\frac{d_3^{g_{X_{12}} - g_{X_2}}}{d_1^{g_{X_{23}} - g_{X_2}}} \cdot |(h_{23}^1)^* P(h_2^3) \cap P(h_{12}^3, h_{23}^1)| \right)^2.$$

Esto implica que

$$|(h_{23}^1)^* P(h_2^3) \cap P(h_{12}^3, h_{23}^1)| = a_1 d_1^{g_{X_{23}} - g_{X_2}} \quad (5.15)$$

para alguna $a_1 \in \mathbb{Z}^+$ y por lo tanto

$$|K(L_{P(h_{23}^1, h_{12}^3)})| = a_1^2 d_3^{2(g_{X_{12}} - g_{X_2})}. \quad (5.16)$$

De (2.25) tenemos

$$|K(L_{P(h_{23}^1, h_{12}^3)})| = |K(L_{P(h_{12}^3)}) \cap P(h_{12}^3, h_{23}^1)| \cdot |(h_{23}^1)^* P(h_2^3) \cap P(h_{12}^3, h_{23}^1)|. \quad (5.17)$$

Sustituyendo (5.15) y (5.16) en (5.17) concluimos

$$|K(L_{P(h_{12}^3)}) \cap P(h_{12}^3, h_{23}^1)| = a_1 \cdot \frac{d_3^{2(g_{X_{12}} - g_{X_2})}}{d_1^{g_{X_{23}} - g_{X_2}}}. \quad (5.18)$$

Esto implica que

$$a_1 = c_1 d_1^{g_{X_{23}} - g_{X_2}} \text{ donde } c_1 \in \mathbb{Z}^+, \quad (5.19)$$

por lo tanto, sustituyendo (5.19) en (5.16) y (5.15), tenemos

$$|K(L_{P(h_{23}^1, h_{12}^3)})| = c_1^2 d_1^{2(g_{X_{23}} - g_{X_2})} d_3^{2(g_{X_{12}} - g_{X_2})} \quad (5.20)$$

$$|(h_{23}^1)^* P(h_2^3) \cap P(h_{12}^3, h_{23}^1)| = c_1 d_1^{2(g_{X_{23}} - g_{X_2})}. \quad (5.21)$$

Análogamente para

$$P(h_{23}^1) = (h_{12}^3)^* P(h_2^1) + P(h_{12}^3, h_{23}^1),$$

como

$$L_{(h_{12}^3)^* P(h_2^1)} \text{ es de tipo } \underbrace{(d_3, \dots, d_3)}_{g_{X_{12}} - 2g_{X_2}}, \underbrace{(d_1 d_3, \dots, d_1 d_3)}_{g_{X_2}} \text{ proposición (3.2.1)} \quad (5.22)$$

$$L_{P(h_{23}^1)} \text{ es de tipo } (1, \dots, 1, \underbrace{d_1, \dots, d_1}_{g_{X_{23}}})$$

tenemos

$$|K(L_{P(h_{23}^1, h_{12}^3)})| = c_2^2 d_3^{2(g_{X_{12}} - g_{X_2})} d_1^{2(g_{X_{23}} - g_{X_2})} \quad (5.23)$$

$$|(h_{12}^3)^* P(h_2^1) \cap P(h_{12}^3, h_{23}^1)| = c_2 d_3^{2(g_{X_{12}} - g_{X_2})} \quad (5.24)$$

para alguna $c_2 \in \mathbb{Z}^+$. Por lo tanto la ecuación (2.25) implica que

$$|K(L_{(h_{23}^1)^* P(h_2^3)})| = |K(L_{P(h_{23}^1)}) \cap (h_{23}^1)^* P(h_2^3)| \cdot |(h_{23}^1)^* P(h_2^3) \cap P(h_{12}^3, h_{23}^1)| \quad (5.25)$$

$$|K(L_{(h_{12}^3)^* P(h_2^1)})| = |K(L_{P(h_{12}^3)}) \cap (h_{12}^3)^* P(h_2^1)| \cdot |(h_{12}^3)^* P(h_2^1) \cap P(h_{12}^3, h_{23}^1)| \quad (5.26)$$

entonces

$$|K(L_{P(h_{12}^3)}) \cap (h_{23}^1)^* P(h_2^3)| = \frac{d_3^{2g_{X_2}}}{c_1} \text{ de (5.14) y sustituyendo (5.21) en (5.25)} \quad (5.27)$$

$$|K(L_{P(h_{23}^1)}) \cap (h_{12}^3)^* P(h_2^1)| = \frac{d_1^{2g_{X_2}}}{c_2} \text{ de (5.22) y sustituyendo (5.24) en (5.26)} \quad (5.28)$$

Como

$$|K(L_{P(h_{23}^1, h_{12}^3)})| = c_1^2 d_1^{2(g_{X_{23}} - g_{X_2})} d_3^{2(g_{X_{12}} - g_{X_2})} \text{ de (5.20)}$$

$$= c_2^2 d_1^{2(g_{X_{23}} - g_{X_2})} d_3^{2(g_{X_{12}} - g_{X_2})} \text{ de (5.23)}$$

entonces $c_1 = c_2$, pero $c_1 \mid d_3^{2g_{X_2}}$ de (5.27), $c_2 \mid d_1^{2g_{X_2}}$ de (5.28) y $\text{m.c.d.}(d_1, d_3) = 1$ entonces $c_1 = c_2 = 1$ y por lo tanto

$$|K(L_{P(h_{23}^1, h_{12}^3)})| = d_1^{2(g_{X_{23}} - g_{X_2})} d_3^{2(g_{X_{12}} - g_{X_2})}. \quad (5.29)$$

Esto finaliza la prueba de (1) del teorema.

Con este resultado podemos calcular $|K(L_{P_{123}})|$.

La ecuación (2.24) y la definición 5.1.1 implican que

$$|K(L_{P_{123}})| \cdot |K(L_{(h_{12}^3)^* P_{12}})| = |P_{123} \cap (h_{12}^3)^* P_{12}|^2 \cdot |K(L_{P(h_{12}^3, h_{23}^1)})| \quad (5.30)$$

$$|K(L_{P_{123}})| \cdot |K(L_{(h_{23}^1)^* P_{13}})| = |P_{123} \cap (h_{23}^1)^* P_{13}|^2 \cdot |K(L_{P(h_{23}^1, h_{12}^3)})| \quad (5.31)$$

$$|K(L_{P_{123}})| \cdot |K(L_{(h_{23}^1)^* P_{23}})| = |P_{123} \cap (h_{23}^1)^* P_{23}|^2 \cdot |K(L_{P(h_{23}^1, h_{12}^3)})| \quad (5.32)$$

Por (1) del Teorema 5.3.1 se tiene que

$$\begin{aligned} |K(L_{P(h_{23}^1, h_{13}^2)})| &= d_1^{2(g_{X_{23}} - g_{X_3})} d_2^{2(g_{X_{13}} - g_{X_3})} \\ |K(L_{P(h_{23}^1, h_{12}^3)})| &= d_1^{2(g_{X_{23}} - g_{X_2})} d_3^{2(g_{X_{12}} - g_{X_2})} \\ |K(L_{P(h_{13}^2, h_{12}^3)})| &= d_2^{2(g_{X_{13}} - g_{X_1})} d_3^{2(g_{X_{12}} - g_{X_1})} \end{aligned} \quad (5.33)$$

Como

$$\begin{aligned} |K(L_{(h_{12}^3)^* P_{12}})| &= d_3^{2(g_{X_{12}} - g_{X_1} - g_{X_2})} d_1^{2g_{X_2}} d_2^{2g_{X_1}} \\ |K(L_{(h_{13}^2)^* P_{13}})| &= d_2^{2(g_{X_{13}} - g_{X_1} - g_{X_3})} d_1^{2g_{X_3}} d_3^{2g_{X_1}} \quad \text{Proposición 3.2.1 y Proposición 3.1 en [7]} \\ |K(L_{(h_{23}^1)^* P_{23}})| &= d_1^{2(g_{X_{23}} - g_{X_2} - g_{X_3})} d_2^{2g_{X_3}} d_3^{2g_{X_2}} \end{aligned} \quad (5.34)$$

entonces, despejando $|K(L_{P_{123}})|$ en (5.30) sustituyendo en (5.31) y (5.32) tenemos

$$|P_{123} \cap (h_{12}^3)^* P_{12}| = \frac{d_3^{2(g_{X_{12}} - g_{X_1} - g_{X_2})}}{d_2^{2(g_{X_{13}} - g_{X_1} - g_{X_3})}} \cdot |P_{123} \cap (h_{13}^2)^* P_{13}| \quad (5.35)$$

$$|P_{123} \cap (h_{12}^3)^* P_{12}| = \frac{d_3^{2(g_{X_{12}} - g_{X_1} - g_{X_2})}}{d_1^{2(g_{X_{23}} - g_{X_2} - g_{X_3})}} \cdot |P_{123} \cap (h_{23}^1)^* P_{23}|. \quad (5.36)$$

Como $|P_{123} \cap (h_{jk}^i)^* P_{jk}| \in \mathbb{Z}^+$ y $\text{m.c.d.}(d_i, d_j) = 1$ entonces

$$|P_{123} \cap (h_{13}^2)^* P_{13}| = a'_2 d_2^{2(g_{X_{13}} - g_{X_1} - g_{X_3})}, \quad \text{donde } a'_2 \in \mathbb{Z}^+ \quad \text{de (5.35)} \quad (5.37)$$

$$|P_{123} \cap (h_{23}^1)^* P_{23}| = a'_1 d_1^{2(g_{X_{23}} - g_{X_2} - g_{X_3})}, \quad \text{donde } a'_1 \in \mathbb{Z}^+ \quad \text{de (5.36)}. \quad (5.38)$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} |P_{123} \cap (h_{12}^3)^* P_{12}| &= a'_2 d_3^{2(g_{X_{12}} - g_{X_1} - g_{X_2})} \quad \text{de (5.37) y (5.35)} \\ &= a'_1 d_3^{2(g_{X_{12}} - g_{X_1} - g_{X_2})} \quad \text{de (5.38) y (5.36)}. \end{aligned}$$

Esto implica que $a'_1 = a'_2$ y por lo tanto haciendo $a := a'_1$ tenemos

$$|P_{123} \cap (h_{12}^3)^* P_{12}| = a d_3^{2(g_{X_{12}} - g_{X_1} - g_{X_2})} \quad (5.39)$$

$$|P_{123} \cap (h_{13}^2)^* P_{13}| = a d_2^{2(g_{X_{13}} - g_{X_1} - g_{X_3})} \quad (5.40)$$

$$|P_{123} \cap (h_{23}^1)^* P_{23}| = a d_1^{2(g_{X_{23}} - g_{X_2} - g_{X_3})} \quad (5.41)$$

La ecuación (2.25) implica que

$$|K(L_{(h_{12}^3)^* P_{12}})| = |K(L_{P(h_{23}^1, h_{13}^2)}) \cap (h_{12}^3)^* P_{12}| \cdot |P_{123} \cap (h_{12}^3)^* P_{12}| \quad (5.42)$$

$$|K(L_{(h_{13}^2)^* P_{13}})| = |K(L_{P(h_{23}^1, h_{12}^3)}) \cap (h_{13}^2)^* P_{13}| \cdot |P_{123} \cap (h_{13}^2)^* P_{13}| \quad (5.43)$$

$$|K(L_{(h_{23}^1)^* P_{23}})| = |K(L_{P(h_{13}^2, h_{12}^3)}) \cap (h_{23}^1)^* P_{23}| \cdot |P_{123} \cap (h_{23}^1)^* P_{23}| \quad (5.44)$$

Las ecuaciones en (5.34), (5.39), (5.40) y (5.41) implican

$$|K(L_{P(h_{23}^1, h_{13}^2)}) \cap (h_{12}^3)^* P_{12}| = \frac{d_1^{2g_{X_2}} d_2^{2g_{X_1}}}{a} \quad \text{de (5.39) y (5.42)}$$

$$|K(L_{P(h_{23}^1, h_{12}^3)}) \cap (h_{13}^2)^* P_{13}| = \frac{d_1^{2g_{X_3}} d_3^{2g_{X_1}}}{a} \quad \text{de (5.40) y (5.43)}$$

$$|K(L_{P(h_{13}^2, h_{12}^3)}) \cap (h_{23}^1)^* P_{23}| = \frac{d_2^{2g_{X_3}} d_3^{2g_{X_2}}}{a} \quad \text{de (5.41) y (5.44)}$$

Como $\text{m.c.d.}(d_i, d_j) = 1$ las ecuaciones anteriores implican que $a = 1$.
La ecuación (5.30) implica

$$|K(L_{P_{123}})| = d_1^{2(g_{X_{23}} - g_{X_2} - g_{X_3})} d_2^{2(g_{X_{13}} - g_{X_1} - g_{X_3})} d_3^{2(g_{X_{12}} - g_{X_1} - g_{X_2})}$$

Esto finaliza la prueba de 2 del Teorema. ■

De la prueba del Teorema anterior obtuvimos los siguientes resultados

Corolario 5.3.1: 1. $|(h_{jk}^i)^* P(h_j^k) \cap P(h_{ij}^k, h_{jk}^i)| = d_i^{2(g_{X_{jk}} - g_{X_j})}$.

2. $|(h_{jk}^i)^* P_{jk} \cap P_{123}| = d_i^{2(g_{X_{jk}} - g_{X_j} - g_{X_k})}$.

Corolario 5.3.2: Dado el diagrama (2.6), si $g_Y > 0$, $\deg(g_1) = \deg(f_2) = d_1$ y $\deg(g_2) = \deg(f_1) = d_2$ entonces

$$|K(L_{P(f_1, f_2)})| = d_1^{2(g_{X_2} - g_Y)} d_2^{2(g_{X_1} - g_Y)} = d_1^{2\dim P(g_2)} d_2^{2\dim P(g_1)}$$

.

Del resultado 2 en el teorema anterior se tiene el siguiente

Corolario 5.3.3: Una condición necesaria y suficiente para obtener variedades de Prym-Tyurin está dada por las ecuaciones

$$\dim P_{123} = g_{X_{23}} - g_{X_2} - g_{X_3} = g_{X_{13}} - g_{X_1} - g_{X_3} = g_{X_{12}} - g_{X_1} - g_{X_2}$$

si d_1 , d_2 y d_3 son primos relativos a pares.

Como P_{123} es Prym-Tyurin de exponente e si y sólo si $L_{P_{123}}$ es de tipo (e, \dots, e) (ver [4]) entonces, si d_1 , d_2 y d_3 son primos relativos a pares ($\text{m.c.d.}(d_i, d_j) = 1$) y

$$\dim P_{123} = g_{X_{23}} - g_{X_2} - g_{X_3} = g_{X_{13}} - g_{X_1} - g_{X_3} = g_{X_{12}} - g_{X_1} - g_{X_2}$$

haciendo $p := \dim P_{123}$ tenemos que

$$|K(L_{P_{123}})| = (d_1 d_2 d_3)^{2p}.$$

Esto implica que $L_{P_{123}}$ es de tipo $(\underbrace{d_1 d_2 d_3, \dots, d_1 d_2 d_3}_{\dim P_{123}})$ y por lo tanto P_{123} es Prym-Tyurin de exponente $d_1 d_2 d_3$ en $J(X_{123})$.

6. VARIEDAD DE PRYM DE N CUBRIENTES

Al igual que en el capítulo 5 la variedad estudiada en el capítulo 4 no tiene posibilidad alguna de ser la variedad de Prym de n cubrientes puesto que ésta se descompone en subvariedades mas pequeñas.

6.1 Definición de $P_{1\dots n}$

Sean $g_i : X_i \rightarrow Y$ morfismos de curvas suaves proyectivas para $i \in I$ tales que g_i, g_j no factoricen vía un mismo morfismo $Y' \rightarrow Y$. Como hay un único morfismo

$$X_{i_1, \dots, i_r} \xrightarrow{h_{i_1, \dots, i_r}^{i_r}} X_{i_1, \dots, i_{r-1}}$$

para $\{i_1, \dots, i_{r-1}\} \subset \{i_1, \dots, i_r\}$ entonces tenemos un diagrama conmutativo de morfismos finitos de curvas suaves proyectivas con vértices X_{i_1, \dots, i_s} donde $\{i_1, \dots, i_s\} \subset I$. El diagrama siguiente muestra un camino entre $X_{1\dots n}$ e Y :

$$\begin{array}{ccccccc}
 X_{1\dots n} & \xrightarrow{h_{i_1^1 \dots i_{n-1}^1}^{i_1^1}} & X_{i_1^1 \dots i_{n-1}^1} & \xrightarrow{h_{i_1^2 \dots i_{n-2}^2}^{i_2^2}} & X_{i_1^2 \dots i_{n-2}^2} & \longrightarrow & \dots & \xrightarrow{h_{i_1^s \dots i_{n-s}^s}^{i_{n-s}^s}} & X_{i_1^s \dots i_{n-s}^s} \\
 & & & & & & & & \swarrow \\
 Y & \xleftarrow{g_{i_1^{n-1}}} & X_{i_1^{n-1}} & \xleftarrow{h_{i_1^{n-1}}^{i_2^{n-1}}} & X_{i_1^{n-2} i_2^{n-2}} & \xleftarrow{h_{i_1^{n-2} i_2^{n-2}}^{i_3^{n-2}}} & \dots & \xleftarrow{h_{i_1^{s+1} \dots i_{n-s-1}^{s+1}}^{i_{n-s}^{s+1}}} & X_{i_1^{s+1} \dots i_{n-s-1}^{s+1}}
 \end{array} \tag{6.1}$$

donde

$$\{i_1^{s+1}, \dots, i_{n-s}^{s+1}\} = \{i_1^s, \dots, i_{n-s}^s\} \subset I \text{ para } 1 \leq s \leq n-2. \tag{6.2}$$

La aplicación $X_{1\dots n} \rightarrow X_{i_1^s \dots i_{n-s}^s}$ es denotada por

$$h_{i_1^s \dots i_{n-s}^s} = h_{i_1^1 \dots i_{n-1}^1}^{i_1^1} \circ \dots \circ h_{i_1^{s-1} \dots i_{n-s+1}^{s-1}}^{i_{n-s+1}^{s-1}} \circ h_{i_1^s \dots i_{n-s}^s}^{i_{n-s}^s}$$

donde $2 \leq s \leq n-2$.

En (1.1) se muestra el diagrama para $I = \{1, 2, 3\}$.

Definición 6.1.1: Definimos la variedad de Prym $P_{1\dots n}$ de $n > 3$ cubrientes como la subvariedad abeliana complementaria de

$$(h_{1\dots(i-1)(i+1)\dots n}^i)^* P_{1\dots(i-1)(i+1)\dots n} \quad \text{en} \quad [\cap_{j \neq i} P(h_{1\dots(j-1)(j+1)\dots n}^j)]^0.$$

La siguiente proposición da una caracterización más simple para $P_{1\dots n}$

Proposición 6.1.1: $P_{1\dots n} = [\cap_{i=1}^n P(h_{1\dots(i-1)(i+1)\dots n}^i)]^0$.

Los siguientes resultados son necesarios para probar la proposición 6.1.2, la cual será de gran utilidad para la prueba del teorema 6.2.1.

Lema 6.1.1: Sea $(C^{i_1 \dots i_s})_r$ el conjunto de las combinaciones de r elementos en $I \setminus \{i_1, \dots, i_s\}$. Supongamos que

$$\begin{aligned} P(h_{1 \dots (i-1)(i+1) \dots n}^i) = & \sum_{j \neq i, k}^n (h_{ji})^* P_{ji} + \sum_{i_1 i_2 \in (C^{ik})_2} (h_{i_1 i_2 i})^* P_{i_1 i_2 i} + \dots + \\ & \sum_{i_1 \dots i_{n-3} \in (C^{ik})_{n-3}} (h_{i_1 \dots i_{n-3} i})^* P_{i_1 \dots i_{n-3} i} + (h_{1 \dots (k-1)(k+1) i}^k)^* P_{1 \dots (k-1)(k+1) i} \\ & + [P(h_{12 \dots (i-1)(i+1) \dots n}^i) \cap P(h_{1 \dots (k-1)(k+1) \dots n}^k)]^0 + l_i^* P(g_i) \end{aligned}$$

para $i, k \in I$ tales que $k \neq i$, entonces

$$\begin{aligned} [\cap_{j=1}^s P(h_{i_1 i_2 \dots i_{(j-1) i_{(j+1)} \dots i_n}^{i_j}})]^0 = & (h_{i_1 \dots i_s})^* P_{i_1 \dots i_s} + \sum_{j=(s+2)}^n (h_{i_1 \dots i_s i_j})^* P_{i_1 \dots i_s i_j} + \\ & \sum_{j_1 j_2 \in (C^{i_1 \dots i_{(s+1)}})_2} (h_{i_1 \dots i_s j_1 j_2})^* P_{i_1 \dots i_s j_1 j_2} + \dots + \\ & \sum_{j_1 \dots j_{n-s+2} \in (C^{i_1 \dots i_{(s+1)}})_{n-(s+2)}} (h_{i_1 \dots i_s j_1 \dots j_{n-(s+2)}})^* P_{i_1 \dots i_s j_1 \dots j_{n-(s+2)}} \\ & + (h_{i_1 \dots i_s i_{(s+2)} \dots i_n}^{i_{s+1}})^* P_{i_1 \dots i_s i_{(s+2)} \dots i_n} + [\cap_{j=1}^{s+1} P(h_{i_1 i_2 \dots i_{(j-1) i_{(j+1)} \dots i_n}^{i_j}})]^0 \end{aligned}$$

para $\{i_1, \dots, i_s\} \subset I$ tal que $2 \leq s \leq n-1$.

Demostración: (Inducción en s) Sea $\{i_1, \dots, i_s\} \subset I$, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $i_j = j$ para $j = 1, \dots, s$, es decir $\{i_1, \dots, i_s\} = \{1, \dots, s\}$.

Sea $k = 3$, por hipótesis tenemos

$$\begin{aligned} P(h_{2 \dots n}^1) = & \sum_{i \neq 1, 3}^n (h_{1i})^* P_{1i} + \sum_{i_1 i_2 \in (C^{13})_2} (h_{1i_1 i_2})^* P_{1i_1 i_2} + \dots + \\ & \sum_{i_1 \dots i_{n-3} \in (C^{13})_{n-3}} (h_{1i_1 \dots i_{n-3}})^* P_{1i_1 \dots i_{n-3}} + (h_{124 \dots n}^3)^* P_{124 \dots n} \\ & + [P(h_{2 \dots n}^1) \cap P(h_{124 \dots n}^3)]^0 + l_1^* P(g_1) \end{aligned} \quad (6.3)$$

$$\begin{aligned} P(h_{13 \dots n}^2) = & \sum_{i \neq 2, 3}^n (h_{2i})^* P_{2i} + \sum_{i_1 i_2 \in (C^{23})_2} (h_{2i_1 i_2})^* P_{2i_1 i_2} + \dots + \\ & \sum_{i_1 \dots i_{n-3} \in (C^{13})_{n-3}} (h_{2i_1 \dots i_{n-3}})^* P_{2i_1 \dots i_{n-3}} + (h_{124 \dots n}^3)^* P_{124 \dots n} \\ & + [P(h_{13 \dots n}^2) \cap P(h_{124 \dots n}^3)]^0 + l_2^* P(g_2). \end{aligned} \quad (6.4)$$

El lema 2.6.1, (6.3) y (6.4) implican

$$\begin{aligned} [P(h_{2 \dots n}^1) \cap P(h_{13 \dots n}^2)]_i^0 = & (h_{12})^* P_{12} + \sum_{i=4}^n (h_{12i})^* P_{12i} \\ + \sum_{i_1 i_2 \in (C^{123})_2} (h_{12i_1 i_2})^* P_{12i_1 i_2} + \dots + & \sum_{i_1 \dots i_{n-4} \in (C^{123})_{n-4}} (h_{12i_1 \dots i_{n-4}})^* P_{12i_1 \dots i_{n-4}} \\ + (h_{124 \dots n}^3)^* P_{124 \dots n} + [\cap_{i=1}^3 P(h_{1 \dots (i-1)(i+1) \dots n}^i)]^0. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Supongamos que el resultado es válido para $s < n - 1$ intersecciones. Probaremos que el resultado es válido para $s + 1 \leq n - 1$. La hipótesis implica para $k = s + 2$

$$\begin{aligned}
P(h_{1\dots s(s+2)\dots n}^{s+1}) = &_i \sum_{i \neq (s+1), (s+2)}^n (h_{i(s+1)})^* P_{i(s+1)} + \\
& \sum_{i_1 i_2 \in (C^{(s+1)(s+2)})_2} (h_{i_1 i_2 (s+1)})^* P_{i_1 i_2 (s+1)} + \cdots + \\
& \sum_{i_1 \dots i_{n-3} \in (C^{(s+1)(s+2)})_{n-3}} (h_{i_1 \dots i_{n-3} (s+1)})^* P_{i_1 \dots i_{n-3} (s+1)} + \\
& (h_{1\dots (s+1)(s+3)\dots n}^{s+2})^* P_{1\dots (s+1)(s+3)\dots n} \\
& + [P(h_{1\dots s(s+2)\dots n}^{s+1}) \cap P(h_{1\dots (s+1)(s+3)\dots n}^{s+2})]^0 + l_{s+1}^* P(g_{s+1})
\end{aligned} \tag{6.6}$$

La hipótesis de inducción implica

$$\begin{aligned}
[\cap_{i=1}^s P(h_{12\dots (i-1)(i+1)\dots n}^i)]^0 = &_i (h_{1\dots s})^* P_{1\dots, s} + \sum_{i \in (C^{1\dots s(s+2)})} (h_{1\dots si})^* P_{1\dots si} + \\
& \sum_{i_1 i_2 \in (C^{1\dots s(s+2)})_2} (h_{1\dots si_1 i_2})^* P_{1\dots si_1 i_2} + \cdots + \\
& \sum_{i_1 \dots i_{n-s+2} \in (C^{1\dots s(s+2)})_{n-(s+2)}} (h_{1\dots si_1 \dots i_{n-(s+2)}})^* P_{1\dots si_1 \dots i_{n-(s+2)}} \\
& + (h_{1\dots (s+1)(s+3)\dots n}^{s+2})^* P_{1\dots (s+1)(s+3)\dots n} + \\
& [\cap_{i=1}^s P(h_{12\dots (i-1)(i+1)\dots n}^i) \cap P(h_{1\dots (s+1)(s+3)\dots n}^{s+2})]^0.
\end{aligned} \tag{6.7}$$

Entonces, el lema 2.6.1, (6.6) y (6.7) implican

$$\begin{aligned}
[\cap_{i=1}^{s+1} P(h_{12\dots (i-1)(i+1)\dots i_n}^i)]^0 = &_i (h_{1\dots (s+1)})^* P_{1\dots (s+1)} + \\
& \sum_{i \in (C^{1\dots (s+2)})} (h_{1\dots (s+1)i})^* P_{1\dots (s+1)i} + \\
& \sum_{i_1 i_2 \in (C^{1\dots (s+2)})_2} (h_{1\dots (s+1)i_1 i_2})^* P_{1\dots (s+1)i_1 i_2} + \cdots + \\
& \sum_{i_1 \dots i_{n-s+3} \in (C^{1\dots (s+2)})_{n-(s+3)}} (h_{1\dots si_1 \dots i_{n-(s+3)}})^* P_{1\dots si_1 \dots i_{n-(s+3)}} \\
& + (h_{1\dots (s+1)(s+3)\dots n}^{s+2})^* P_{1\dots (s+1)(s+3)\dots n} + [\cap_{i=1}^{s+2} P(h_{12\dots (i-1)(i+1)\dots n}^i)]^0
\end{aligned} \tag{6.8}$$

■

Lema 6.1.2: *Supongamos que*

$$\begin{aligned}
P(h_{1\dots (n-1)}) = &_i \sum_{i=1}^{n-2} (h_{in})^* P_{in} + \sum_{i_1 i_2 \in (C^{(n-1)n})_2} (h_{i_1 i_2 n})^* P_{i_1 i_2 n} + \cdots + \\
& \sum_{i_1 \dots i_{n-3} \in (C^{(n-1)n})_{n-3}} (h_{i_1 \dots i_{n-3} n})^* P_{i_1 \dots i_{n-3} n} + (h_{1\dots (n-2)n}^{(n-1)})^* P_{1\dots (n-2)n} \\
& + [P(h_{12\dots (n-1)}) \cap P(h_{1\dots (n-2)n}^{(n-1)})]^0 + l_n^* P(g_n)
\end{aligned} \tag{6.9}$$

entonces

$$\begin{aligned}
P(h_{1\dots(n-1)}^n) = & \sum_{i=1}^{n-1} (h_{in})^* P_{in} + \sum_{i_1 i_2 \in (C^n)_2} (h_{i_1 i_2 n})^* P_{i_1 i_2 n} + \cdots + \\
& \left[\sum_{i_1 \dots i_m \in (C^n)_m} (h_{i_1 \dots i_m n})^* P_{i_1 \dots i_m n} - (h_{1\dots(m-1)(n-1)n})^* P_{1\dots(m-1)(n-1)n} \right] + \\
& \left[\sum_{i_1 \dots i_{m+1} \in (C^n)_{m+1}} (h_{i_1 \dots i_{m+1} n})^* P_{i_1 \dots i_{m+1} n} - \sum_{i=m}^{n-2} (h_{i_1 \dots (m-1)(n-1)n})^* P_{i_1 \dots (m-1)(n-1)n} \right] \\
& + \cdots + (h_{12\dots(n-2)n}^{(n-1)})^* P_{12\dots(n-2)n} + (h_{2\dots n}^1)^* P_{2\dots n} + \cdots + (h_{1\dots(m-2)m\dots n}^{(m-1)})^* P_{1\dots(m-1)m\dots n} \\
& + \left[P(h_{1\dots(n-1)}^n) \cap P(h_{1\dots(n-2)n}^{n-1}) \cap P(h_{2\dots n}^1) \cap \cdots \cap P(h_{1\dots(m-2)m\dots n}^{(m-1)}) \right]^0 + I_n^* P(g_n)
\end{aligned}$$

para $2 \leq m \leq n-1$.

Observación 6.1.1: Observemos que las hipótesis en los lemas 6.1.1 y 6.1.2 son equivalentes ya que sólo necesitamos sustituir $i = n$ y $k = n-1$.

Demostración: (Inducción en m) El lema 6.1.1 implica

$$\begin{aligned}
\left[P(h_{1\dots(n-1)}^n) \cap P(h_{1\dots(n-2)n}^{n-1}) \right]^0 = & (h_{(n-1)n})^* P_{(n-1)n} + \sum_{i=2}^{n-2} (h_{(n-1)ni})^* P_{(n-1)ni} \\
& + \sum_{i_1 i_2 \in (C^{1(n-1)n})_2} (h_{(n-1)ni_1 i_2})^* P_{(n-1)ni_1 i_2} + \cdots + \\
& \sum_{i_1 \dots i_{n-4} \in (C^{1(n-1)n})_{n-4}} (h_{(n-1)ni_1 \dots i_{n-4}})^* P_{(n-1)ni_1 \dots i_{n-4}} \\
& + (h_{2\dots n}^1)^* P_{2\dots n} + \left[P(h_{1\dots(n-1)}^n) \cap P(h_{1\dots(n-2)n}^{n-1}) \cap P(h_{2\dots n}^1) \right]^0.
\end{aligned} \tag{6.10}$$

Sustituyendo (6.10) en (6.9) se concluye que la afirmación es válida para $m = 2$.

Supongamos que el lema es cierto para $m < n-1$. El lema 6.1.1 implica

$$\begin{aligned}
\left[P(h_{1\dots(n-1)}^n) \cap P(h_{1\dots(n-2)n}^{n-1}) \cap_{i=1}^{m-1} P(h_{12\dots(i-1)(i+1)\dots i_n}^i) \right]^0 = & (h_{1\dots(m-1)(n-1)n})^* P_{1\dots(m-1)(n-1)n} \\
& + \sum_{i \in (C^{1\dots m(n-1)n})} (h_{1\dots(m-1)(n-1)ni})^* P_{1\dots(m-1)(n-1)ni} + \\
& \sum_{i_1 i_2 \in (C^{1\dots m(n-1)n})_2} (h_{1\dots(m-1)(n-1)ni_1 i_2})^* P_{1\dots(m-1)(n-1)ni_1 i_2} + \cdots + \\
& \sum_{i_1 \dots i_{n-(m+3)} \in (C^{1\dots m(n-1)n})_{n-(m+3)}} (h_{1\dots(m-1)(n-1)ni_1 \dots i_{n-(m+3)}})^* P_{1\dots(m-1)(n-1)ni_1 \dots i_{n-(m+3)}} \\
& + (h_{1\dots(m-1)(m+1)\dots n}^m)^* P_{1\dots(m-1)(m+1)\dots n} \\
& + \left[P(h_{1\dots(n-1)}^n) \cap P(h_{1\dots(n-2)n}^{n-1}) \cap_{i=1}^m P(h_{12\dots(i-1)(i+1)\dots n}^i) \right]^0.
\end{aligned} \tag{6.11}$$

La hipótesis de inducción implica

$$\begin{aligned}
P(h_{1\dots(n-1)}^n) &= {}_i \sum_{i=1}^{n-1} (h_{in})^* P_{in} + \sum_{i_1 i_2 \in (C^n)_2} (h_{i_1 i_2 n})^* P_{i_1 i_2 n} + \cdots + \\
&\left[\sum_{i_1 \dots i_m \in (C^n)_m} (h_{i_1 \dots i_m n})^* P_{i_1 \dots i_m n} - (h_{1\dots(m-1)(n-1)n})^* P_{1\dots(m-1)(n-1)n} \right] + \\
&\left[\sum_{i_1 \dots i_{m+1} \in (C^n)_{m+1}} (h_{i_1 \dots i_{m+1} n})^* P_{i_1 \dots i_{m+1} n} - \sum_{i=m}^{n-2} (h_{i_1 \dots (m-1)(n-1)n})^* P_{i_1 \dots (m-1)(n-1)n} \right] \\
&+ \cdots + (h_{12\dots(n-2)n}^{(n-1)})^* P_{12\dots(n-2)n} + (h_{2\dots n}^1)^* P_{2\dots n} + \cdots + (h_{1\dots(m-2)m\dots n}^{(m-1)})^* P_{1\dots(m-1)m\dots n} \\
&+ \left[P(h_{1\dots(n-1)}^n) \cap P(h_{1\dots(n-2)n}^{n-1}) \cap P(h_{2\dots n}^1) \cap \cdots \cap P(h_{1\dots(m-2)m\dots n}^{(m-1)}) \right]^0 + l_n^* P(g_n)
\end{aligned} \tag{6.12}$$

De sustituir (6.11) en (6.12) se concluye lo esperado. \blacksquare

Proposición 6.1.2:

$$\begin{aligned}
P(h_{1\dots(i-1)(i+1)\dots n}^i) &= {}_i \sum_{j \neq i} (h_{ji})^* P_{ji} + \sum_{i_1 i_2 \in (C^i)_2} (h_{i_1 i_2 i})^* P_{i_1 i_2 i} + \cdots + \\
&\sum_{i_1 \dots i_{n-2} \in (C^i)_{n-2}} (h_{i_1 \dots i_{n-2} i}^{i-1})^* P_{i_1 \dots i_{n-2} i} + P_{1\dots n} + l_i^* P(g_i)
\end{aligned}$$

donde l_i es la aplicación $X_{1\dots n} \rightarrow X_i$.

Demostración: (Inducción en n) Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $i = n$. Dado el diagrama (1.1) de la definición de variedad de Prym de un par de cubrientes tenemos

$$P(h_{12}^3) = {}_i (h_{13}^2)^* P(h_1^3) + P(h_{12}^3, h_{13}^2) = {}_i (h_{13}^2)^* ((h_3^1)^* P(g_3) + P_{13}) + P(h_{12}^3, h_{13}^2)$$

Por lo tanto

$$P(h_{12}^3) = {}_i l_3^* P(g_3) + (h_{13}^2)^* P_{13} + P(h_{12}^3, h_{13}^2). \tag{6.13}$$

De manera similar de tiene que

$$\begin{aligned}
P(h_{12}^3) &= {}_i l_3^* P(g_3) + (h_{23}^1)^* P_{23} + P(h_{12}^3, h_{23}^1) \\
P(h_{13}^2) &= {}_i l_2^* P(g_2) + (h_{23}^1)^* P_{23} + P(h_{13}^2, h_{23}^1)
\end{aligned}$$

esto implica

$$\left[P(h_{12}^3) \cap P(h_{13}^2) \right]^0 = {}_i (h_{23}^1)^* P_{23} + \left[P(h_{12}^3) \cap P(h_{13}^2) P(h_{23}^1) \right]^0 \tag{6.14}$$

por lo tanto, sustituyendo (6.14) en (6.13) tenemos

$$P(h_{12}^3) = {}_i l_3^* P(g_3) + (h_{13}^2)^* P_{13} + (h_{23}^1)^* P_{23} + \left[P(h_{12}^3) \cap P(h_{13}^2) P(h_{23}^1) \right]^0.$$

Supongamos que el lema es cierto para $n = k$. La hipótesis de inducción implica

$$\begin{aligned}
P(h_{1\dots(k-1)}^{k+1}) &= {}_i \sum_{i=1}^{k-1} (h'_{i(k+1)})^* P_{i(k+1)} + \sum_{i_1 i_2 \in (C^{k(k+1)})_2} (h'_{i_1 i_2 (k+1)})^* P_{i_1 i_2 (k+1)} + \cdots + \\
&\sum_{i_1 \dots i_{k-2} \in (C^{k(k+1)})_{k-2}} (h'_{i_1 \dots i_{k-2} (k+1)})^* P_{i_1 \dots i_{k-2} (k+1)} + P_{1\dots(k-1)(k+1)} + (l'_{k+1})^* P(g_{k+1}).
\end{aligned} \tag{6.15}$$

donde h' y l'_i son las aplicaciones $X_{1\dots(k-1)(k+1)} \rightarrow X_{i_1 \dots i_s}$ para $\{i_1, \dots, i_s\} \subset I' = \{1, \dots, (k-1), (k+1)\}$ y $X_{1\dots(k-1)(k+1)} \rightarrow X_i$ para $i \in I'$ respectivamente.

como

$$P(h_{1\dots k}^{k+1}) =_i (h_{1\dots(k-1)(k+1)}^k)^* P(h_{1\dots(k-1)}^{k+1}) + [P(h_{1\dots k}^{k+1}) \cap P(h_{1\dots(k-1)(k+1)}^k)]^0 \quad (6.16)$$

entonces, sustituyendo (6.15) en (6.16) tenemos

$$\begin{aligned} P(h_{1\dots k}^{k+1}) =_i & l_{k+1}^* P(g_{k+1}) + \sum_{i=1}^{k-1} (h_{i(k+1)})^* P_{i(k+1)} + \sum_{i_1 i_2 \in (C_k^{k+1})_2} (h_{i_1 i_2 k+1})^* P_{i_1 i_2(k+1)} + \cdots + \\ & \sum_{i_1 \dots i_{k-2} \in (C_k^{k+1})_{k-2}} (h_{i_1 \dots i_{k-2}(k+1)})^* P_{i_1 \dots i_{k-2}(k+1)} + P_{1\dots(k-1)(k+1)} \\ & + [P(h_{1\dots k}^{k+1}) \cap P(h_{1\dots(k-1)(k+1)}^k)]^0. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Por lo tanto, el lema 6.1.2 implica el resultado haciendo $m = n - 1$. ■

6.1.1 $P_{1\dots n}$ está bien definida.

Sea P_i la subvariedad abeliana complementaria de $(h_{1\dots(i-1)(i+1)\dots n}^i)^* P_{1\dots(i-1)(i+1)\dots n}$ en $[\cap_{j \neq i} P(h_{1\dots(j-1)(j+1)\dots n}^j)]^0$, es decir

$$[\cap_{j \neq i} P(h_{1\dots(j-1)(j+1)\dots n}^j)]^0 =_i (h_{1\dots(i-1)(i+1)\dots n}^i)^* P_{1\dots(i-1)(i+1)\dots n} + P_i. \quad (6.18)$$

El lema 6.1.1 implica

$$[\cap_{j \neq i} P(h_{1\dots(j-1)(j+1)\dots n}^j)]^0 =_i (h_{1\dots(i-1)(i+1)\dots n}^i)^* P_{1\dots(i-1)(i+1)\dots n} + [\cap_{i=1}^n P(h_{1\dots(i-1)(i+1)\dots n}^i)]^0 \quad (6.19)$$

por lo tanto de (6.18) y (6.19)

$$P_1 = \cdots = P_n = [\cap_{i=1}^n P(h_{1\dots(i-1)(i+1)\dots n}^i)]^0$$

Observación 6.1.2: No solo probamos que $P_{1\dots n}$ está bien definida, también probamos la proposición 6.1.1.

6.2 Teorema de descomposición de $J(X_{1\dots n})$

Teorema 6.2.1: Sea C_r el conjunto de combinaciones de r elementos en $\{1, \dots, n\}$. Dado el diagrama (6.1), si $n \geq 3$ entonces

$$\begin{aligned} J(X_{1\dots n}) =_i & l^* J(Y) + \sum_{i=1}^n l_i^* P(g_i) + \sum_{i_1 i_2 \in C_2} (h_{i_1 i_2})^* P_{i_1 i_2} + \\ & \sum_{i_1 i_2 i_3 \in C_3} (h_{i_1 i_2 i_3})^* P_{i_1 i_2 i_3} + \cdots + \sum_{i_1 \dots i_{n-2} \in C_{n-2}} (h_{i_1 \dots i_{n-2}})^* P_{i_1 \dots i_{n-2}} \\ & + \sum_{i_1 \dots i_{n-1} \in C_{n-1}} (h_{i_1 \dots i_{n-1}}^i)^* P_{i_1 \dots i_{n-1}} + P_{1\dots n} \end{aligned}$$

donde l y l_i son las aplicaciones $X_{1\dots n} \rightarrow Y$ y $X_{1\dots n} \rightarrow X_i$ respectivamente.

Demostración: (Inducción en n). El resultado para $n = 3$ está probado en la proposición 5.1.1.

La hipótesis de inducción implica

$$\begin{aligned}
J(X_{1\dots k}) = & {}_i l' J(Y) + \sum_{i=1}^k (l'_i)^* P(g_i) + \sum_{i_1 i_2 \in C_2} (h'_{i_1 i_2})^* P_{i_1 i_2} + \\
& \sum_{i_1 i_2 i_3 \in C_3} (h'_{i_1 i_2 i_3})^* P_{i_1 i_2 i_3} + \cdots + \sum_{i_1 \dots i_{n-2} \in C_{n-2}} (h'_{i_1 \dots i_{n-2}})^* P_{i_1 \dots i_{n-2}} \\
& + \sum_{i_1 \dots i_{n-1} \in C_{k-1}} (h'_{i_1 \dots i_{k-1}})^* P_{i_1 \dots i_{k-1}} + P_{1\dots k}
\end{aligned} \tag{6.20}$$

donde $l' : X_{1\dots k} \rightarrow Y$, $l'_i : X_{1\dots k} \rightarrow X_i$ y $h'_{i_1 \dots i_s} : X_{1\dots k} \rightarrow X_{i_1 \dots i_s}$ para $\{i_1 \dots i_s\} \subset \{1, \dots, k\}$.

Como

$$J(X_{1\dots(k+1)}) = {}_i (h_{1\dots k}^{k+1})^* J(X_{1\dots k}) + P(h_{1\dots k}^{k+1}) \tag{6.21}$$

entonces, sustituyendo (6.20) en (6.21) tenemos

$$\begin{aligned}
J(X_{1\dots(k+1)}) = & {}_i l^* J(Y) + \sum_{i=1}^k l_i^* P(g_i) + \sum_{i_1 i_2 \in C_2} (h_{i_1 i_2})^* P_{i_1 i_2} + \\
& \sum_{i_1 i_2 i_3 \in C_3} (h_{i_1 i_2 i_3})^* P_{i_1 i_2 i_3} + \cdots + \sum_{i_1 \dots i_{k-2} \in C_{k-2}} (h_{i_1 \dots i_{k-2}})^* P_{i_1 \dots i_{k-2}} \\
& + \sum_{i_1 \dots i_{k-1} \in C_{k-1}} (h_{i_1 \dots i_{k-1}})^* P_{i_1 \dots i_{k-1}} + P_{1\dots k} + (h_{1\dots k}^{k+1})^* P(h_{1\dots k}^{k+1})
\end{aligned} \tag{6.22}$$

La proposición 6.1.2 implica

$$\begin{aligned}
P(h_{1\dots k}^{k+1}) = & {}_i \sum_{i=1}^k (h_{i(k+1)})^* P_{i(k+1)} + \sum_{i_1 i_2 \in C_2} (h_{i_1 i_2(k+1)})^* P_{i_1 i_2(k+1)} \\
& + \cdots + \sum_{i_1 \dots i_{k-2} \in C_{k-2}} (h_{i_1 \dots i_{k-2}(k+1)})^* P_{i_1 \dots i_{k-2}(k+1)} + l_{k+1}^* P(g_{k+1}) \\
& + \sum_{i=1}^k (h_{1\dots(i-1)(i+1)\dots(k+1)}^i)^* P_{1\dots(i-1)(i+1)\dots(k+1)} + P_{1\dots(k+1)}
\end{aligned} \tag{6.23}$$

Sustituyendo (6.23) en (6.22) se concluye el resultado. ■

6.3 Dimensión de $P_{1\dots n}$

Los siguientes resultados están probados para $n = 3$ en la sección 5.2. Para generalizar dichos resultados haciendo inducción en n supondremos válidos los resultados siguientes para $k < n$.

Lema 6.3.1: $\deg(h_{i_1 \dots i_{n-1}}^{i_n}) = d_{i_n}$

Demostración: Dado el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
& X_{1\dots n} & \\
h_{i_1 \dots i_{n-1}}^{i_n} \swarrow & & \searrow h_{i_1 \dots i_{n-2} i_n}^{i_{n-1}} \\
X_{i_1 \dots i_{n-1}} & & X_{i_1 \dots i_{n-2} i_n} \\
h_{i_1 \dots i_{n-2}}^{i_{n-1}} \swarrow & & \searrow h_{i_1 \dots i_{n-2}}^{i_n} \\
& X_{i_1 \dots i_{n-2}} &
\end{array} \tag{6.24}$$

la hipótesis de inducción implica que $\deg(h_{i_1 \dots i_{n-2}})^{i_n} = d_{i_n}$ y $\deg(h_{i_1 \dots i_{n-2}}^{i_{n-1}}) = d_{n-1}$. La conmutatividad del diagrama implica el resultado. ■

Lema 6.3.2: *Supongamos que el lugar de ramificación de g_i y g_j son disjuntos para toda $i, j \in I$ entonces*

$$\omega_{h_{i_1 \dots i_{n-1}}^{i_n}} = d_{i_1} \dots d_{i_{n-1}} \omega_{g_{i_n}}$$

Demostración: De la hipótesis de inducción

$$\omega_{h_{i_1 \dots i_{n-2}}^{i_n}} = d_{i_1} \dots d_{i_{n-2}} \omega_{g_{i_n}} \quad (6.25)$$

La hipótesis y (6.24) implican

$$\omega_{h_{i_1 \dots i_{n-1}}^{i_n}} = \deg(h_{i_1 \dots i_{n-2}}^{i_{n-1}}) \omega_{h_{i_1 \dots i_{n-2}}^{i_n}} \quad (6.26)$$

Usar el lema 6.3.1 y (6.25) en (6.26) implica el resultado. ■

Proposición 6.3.1: *Supongamos que el lugar de ramificación de g_i y g_j son disjuntos para toda $i, j \in I$ entonces*

$$g_{X_{1 \dots n}} = 1 + d_1 \dots d_n (g_Y - 1) + \frac{1}{2} (d_1 \dots d_{n-1} \omega_{g_n}) + \dots + d_1 \dots d_{i-1} d_{i+1} \dots d_n \omega_{g_i} \\ + \dots + d_2 \dots d_n \omega_{g_1}$$

Demostración: Dada la aplicación $h_{1 \dots (n-1)}^n : X_{1 \dots n} \rightarrow X_{1 \dots (n-1)}$ la formula de Riemann-Hurwitz implica que

$$g_{X_{1 \dots n}} = 1 + \deg(h_{1 \dots (n-1)}^n) (g_{X_{1 \dots (n-1)}} - 1) + \frac{1}{2} \omega_{h_{1 \dots (n-1)}^n}. \quad (6.27)$$

Como

$$\omega_{h_{1 \dots (n-1)}^n} = d_1 \dots d_{n-1} \omega_{g_n} \quad \text{del lema (6.3.2)}$$

$$\deg(h_{1 \dots (n-1)}^n) = d_n \quad \text{del lema (6.3.1)}$$

$$g_{X_{1 \dots (n-1)}} = 1 + d_1 \dots d_{n-1} (g_Y - 1) + \frac{1}{2} (d_1 \dots d_{n-2} \omega_{g_{n-1}} \\ + \dots + d_1 \dots d_{i-1} d_{i+1} \dots d_{n-1} \omega_{g_i} \\ + \dots + d_2 \dots d_{n-1} \omega_{g_1}) \quad \text{por hipótesis de inducción}$$

entonces, sustituyendo las ecuaciones anteriores en (6.27) se concluye el resultado. ■

Proposición 6.3.2:

$$\dim P_{1 \dots n} = g_{X_{1 \dots n}} - \sum_{i_1 \dots i_{n-1} \in C_{n-1}} g_{X_{i_1 \dots i_{n-1}}} + \dots + (-1)^j \sum_{i_1 \dots i_{n-j} \in C_{n-j}} g_{X_{i_1 \dots i_{n-j}}} \\ + \dots + (-1)^{n-1} \sum g_{X_i} + (-1)^n g_Y$$

Demostración: El teorema 6.2.1 implica que

$$\dim P_{1 \dots n} = g_{X_{1 \dots n}} - \sum_{i=1}^n \dim P(g_i) - \sum_{ij \in C_2} \dim P_{ij} - \sum_{i_1 i_2 i_3 \in C_3} \dim P_{i_1 i_2 i_3} \\ - \dots - \sum_{i_1 \dots i_{n-1} \in C_{n-1}} \dim P_{i_1 \dots i_{n-1}} - g_Y. \quad (6.28)$$

esto implica

$$\begin{aligned}
\text{Coef}(g_Y - 1) &= d_1 \dots d_n - \sum_{i_1 \dots i_{n-1} \in C_{n-1}} d_{i_1} \dots d_{i_{n-1}} + \dots + \\
&\quad (-1)^j \sum_{i_1 \dots i_{n-j} \in C_{n-j}} d_{i_1} \dots d_{i_{n-j}} + \dots + (-1)^{n-1} \sum_{i=1}^n d_i + (-1)^n \\
&= (d_1 - 1) \dots (d_n - 1) \\
\text{Coef}(\omega_{g_i}) &= d_1 \dots d_{i-1} d_{i+1} \dots d_n - \sum_{\substack{i_1 \dots i_{n-2} \in C_{n-2} \\ i_j \neq i}} d_{i_1} \dots d_{i_{n-2}} + \dots + \\
&\quad + \dots + (-1)^s \sum_{\substack{i_1 \dots i_{n-s-1} \in C_{n-s-1} \\ i_j \neq i}} d_{i_1} \dots d_{i_{n-s-1}} + \dots + \\
&\quad (-1)^{n-2} \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq i}}^n d_s + (-1)^{n-1} \\
&= (d_1 - 1) \dots (d_{i-1} - 1) (d_{i+1} - 1) \dots (d_n - 1) \\
\text{Coef}(1) &= \begin{cases} (1 + (-1))^n - (-1)^n - (-1)^0 = 0 & \text{si } n \text{ es impar,} \\ (1 + (-1))^n = 0 & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}
\end{aligned}$$

lo cual implica el resultado. ■

Corolario 6.3.1: $\dim P_{1\dots n} > 0$

Demostración: El resultado se sigue de observar que $\omega_{g_i} \geq 2d_i > 2(d_i - 1)$ para toda $i \in I$. ■

6.4 El orden de $K(L_{P_{1\dots n}})$.

Teorema 6.4.1: Dado el diagrama (6.1), si $m.c.d(d_i, d_j) = 1$ para todo $\{i, j\} \subset \{1, \dots, n\}$ entonces

$$|K(L_{P_{1\dots n}})| = \prod_{i=1}^n d_i^{2 \dim P_{1\dots(i-1)(i+1)\dots n}}$$

donde $n \geq 2$ y $g_Y \geq 0$. Si $n = 2$ hacemos $P_i = P(g_i)$, para $i = 1, 2$.

Demostración: (Por inducción sobre n)

El corolario 5.3.2 demuestra que el teorema es válido para $n = 2$ y $g_Y > 0$. El caso $n = 2$ y $g_Y = 0$ se sigue de la proposición 2.6.6.

La definición de variedad de Prym de $n \geq 3$ cubrientes implica

$$[P(h_{2\dots n}^1) \cap \dots \cap P(h_{1\dots(n-2)n}^{n-1})]^0 = (h_{1\dots(n-1)}^n)^* P_{1\dots(n-1)} + P_{1\dots n} \quad (6.31)$$

De la hipótesis de inducción

$$|K(L_{P_{1\dots(n-1)}})| = d_1^{2 \dim P_{2\dots(n-1)}} d_2^{2 \dim P_{13\dots(n-1)}} \dots d_{n-1}^{2 \dim P_{1\dots(n-2)}} \quad (6.32)$$

$$|K(L_{[P(h_{2\dots n}^1) \cap \dots \cap P(h_{1\dots(n-2)n}^{n-1})]^0})| = d_1^{2 \dim(n) P_{2\dots(n-1)}} d_2^{2 \dim(n) P_{13\dots(n-1)}} \dots d_{n-1}^{2 \dim(n) P_{1\dots(n-2)}} \quad (6.33)$$

donde $\dim_{(n)}$ significa agregar al sub-índice de cada sumando en $\dim P_{i_1 \dots i_{n-1}}$ una “ n ” y escribir g_{x_n} en lugar de g_y , por ejemplo: Como

$$\dim P_{1 \dots (n-2)} = g_{x_{1 \dots (n-2)}} + \dots + (-1)^{n-3} \sum_{i=1}^{n-2} g_{x_i} + (-1)^{n-2} g_y$$

entonces

$$\dim_{(n)} P_{1 \dots (n-2)} = g_{x_{1 \dots (n-2)n}} + \dots + (-1)^{n-3} \sum_{i=1}^{n-2} g_{x_{i_n}} + (-1)^{n-2} g_{x_n}.$$

Supongamos que $L_{P_{1 \dots (n-1)}}$ es de tipo $(\underbrace{a_1, \dots, a_s}_{\dim P_{1 \dots (n-1)}})$; la proposición 4.2.2 implica que $L_{(h_{1 \dots (n-1)}^n)^* P_{1 \dots (n-1)}}$

es de tipo $(\underbrace{d_n a_1, \dots, d_n a_s}_{\dim P_{1 \dots (n-1)}})$. Por lo tanto el resultado 2 y la ecuación (6.32) implican que

$$|K(L_{(h_{1 \dots (n-1)}^n)^* P_{1 \dots (n-1)}})| = d_n^{2 \dim P_{1 \dots (n-1)}} d_1^{2 \dim P_{2 \dots (n-1)}} \dots d_{n-1}^{2 \dim P_{1 \dots (n-2)}}. \quad (6.34)$$

De la ecuación (2.24), (6.33), (6.34) se sigue

$$\begin{aligned} |K(L_{P_{1 \dots n}})| &= \frac{\prod_{i=1}^{n-1} d_i^{2[\dim_{(n)} P_{1 \dots (i-1)(i+1) \dots (n-1)} - \dim P_{1 \dots (i-1)(i+1) \dots (n-1)}]}}{d_n^{-2[\dim P_{1 \dots (n-1)}]}} \cdot |P_{1 \dots n} \cap (h_{1 \dots (n-1)}^n)^* P_{1 \dots (n-1)}|^2 \\ &= \frac{\prod_{i=1}^{n-1} d_i^{2[\dim P_{1 \dots (i-1)(i+1) \dots n}]}{d_n^{2[\dim P_{1 \dots (n-1)}]}} \cdot |P_{1 \dots n} \cap (h_{1 \dots (n-1)}^n)^* P_{1 \dots (n-1)}|^2 \end{aligned} \quad (6.35)$$

Análogamente para

$$[\cap_{j \neq i} P_{h_{1 \dots (j-1)(j+1) \dots n}^j}]^0 = (h_{1 \dots (i-1)(i+1) \dots n}^i)^* P_{1 \dots (i-1)(i+1) \dots n} + P_{1 \dots n} \quad (6.36)$$

donde $i \in \{1, \dots, n-1\}$, se tiene que

$$|K(L_{P_{1 \dots n}})| = \frac{\prod_{j \neq i} d_j^{2[\dim P_{1 \dots (j-1)(j+1) \dots n}]}{d_i^{2[\dim P_{1 \dots (i-1)(i+1) \dots n}]} \cdot |P_{1 \dots n} \cap (h_{1 \dots (i-1)(i+1) \dots n}^i)^* P_{1 \dots (i-1)(i+1) \dots n}|^2. \quad (6.37)$$

De las ecuaciones (6.35) y (6.37) se sigue que

$$|P_{1 \dots n} \cap (h_{1 \dots (n-1)}^n)^* P_{1 \dots (n-1)}| = \frac{d_n^{2[\dim P_{1 \dots (n-1)}]}}{d_i^{2[\dim P_{1 \dots (i-1)(i+1) \dots n}]} \cdot |P_{1 \dots n} \cap (h_{1 \dots (i-1)(i+1) \dots n}^i)^* P_{1 \dots (i-1)(i+1) \dots n}| \quad (6.38)$$

La ecuación (6.38) implica

$$|P_{1 \dots n} \cap (h_{1 \dots (i-1)(i+1) \dots n}^i)^* P_{1 \dots (i-1)(i+1) \dots n}| = a_i d_i^{2[\dim P_{1 \dots (i-1)(i+1) \dots n}]} \quad (6.39)$$

para algún $a_i \in \mathbb{Z}^+$ $i = 1, \dots, n-1$.

Sustituyendo (6.39) en (6.38) se tiene que

$$|P_{1 \dots n} \cap (h_{1 \dots (n-1)}^n)^* P_{1 \dots (n-1)}| = a_i d_n^{2[\dim P_{1 \dots (n-1)}]}$$

para toda $i = 1, \dots, n-1$, por lo tanto $a_1 = \dots = a_{n-1}$.

Haciendo $a = a_1$ se sigue que

$$|P_{1\dots n} \cap (h_{1\dots(n-1)}^n)^* P_{1\dots(n-1)}| = ad_n^{2[\dim P_{1\dots(n-1)}]} \quad (6.40)$$

donde $a \in \mathbb{Z}^+$.

De la ecuaciones (6.31), (2.25), (6.34) y (6.40) se tiene que

$$|K(L_{[P(h_{2\dots n}^1) \cap \dots \cap P(h_{1\dots(n-2)n}^{n-1})]^0} \cap (h_{1\dots(n-1)}^n)^* P_{1\dots(n-1)})| \cdot a = \prod_{i=1}^{n-1} d_i^{2[\dim P_{1\dots(i-1)(i+1)\dots n}]}$$

Por lo tanto

$$a \left| \prod_{i=1}^{n-1} d_i^{2[\dim P_{1\dots(i-1)(i+1)\dots n}]} \right|. \quad (6.41)$$

En general, haciendo el procedimiento análogo para (6.36) se sigue que

$$a \left| \prod_{j \neq i} d_j^{2[\dim P_{1\dots(j-1)(j+1)\dots n}]} \right| \quad (6.42)$$

para toda $i = 1, \dots, n-1$.

Como $\text{m.c.d}(d_i, d_j) = 1$ para todo $\{i, j\} \subset \{1, \dots, n\}$, de (6.41) y (6.42) se concluye que $a = 1$ por lo que

$$|P_{1\dots n} \cap (h_{1\dots(n-1)}^n)^* P_{1\dots(n-1)}| = d_n^{2[\dim P_{1\dots(n-1)}]}$$

Sustituir la ecuación anterior en (6.35) implica el resultado. ■

Corolario 6.4.1: *Una condición necesaria para obtener variedades de Prym-Tyurin está dada por las ecuaciones*

$$\dim P_{1\dots n} = \dim P_{1\dots(i-1)(i+1)\dots n}$$

para toda $i = 1 \dots n$ si d_1, \dots, d_{n-1} y d_n son primos relativos a pares.

Como $P_{1\dots n}$ es Prym-Tyurin de exponente e si y solo si $L_{P_{1\dots n}}$ es de tipo (e, \dots, e) (ver [4]) entonces, si d_1, \dots, d_{n-1} y d_n son primos relativos a pares y

$$\dim P_{1\dots n} = \dim P_{1\dots(i-1)(i+1)\dots n}$$

para toda $i = 1, \dots, n$ haciendo $p := \dim P_{1\dots n}$ tenemos que

$$|K(L_{P_{1\dots n}})| = \left(\prod_{i=1}^n d_i \right)^{2p}.$$

Esto implica que $L_{P_{1\dots n}}$ es de tipo $(\underbrace{\prod_{i=1}^n d_i, \dots, \prod_{i=1}^n d_i}_{\dim P_{1\dots n}})$ y por lo tanto $P_{1\dots n}$ es Prym-Tyurin de exponente $\prod_{i=1}^n d_i$ en $J(X_{1\dots n})$.

BIBLIOGRAFÍA.

- [1] A. Grothendieck. *Éléments de géométrie algébrique II. Étude globale élémentaire de quelques classes de morphismes*. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. no. 8 (1961), 222.
- [2] V. Kanev, *Principal polarizations of Prym-Tjurin varieties*, Compositio Math. 64, no. 3, 243 – 270 (2004)
- [3] V. Kanev, *Spectral curves and Prym-Tjurin varieties I*, Proceedings of the Egloffstein conference 1993, de Gruyter 151 – 198 (1995)
- [4] H. Lange, C. Birkenhake. *Complex Abelian Varieties*. Springer-Verlag, 1992.
- [5] H. Lange, C. Pauly, *Abelianization of moduli spaces of principal bundles*, (to appear).
- [6] H. Lange, S. Recillas, *Abelian varieties with group action*, Journ. Reine Angew. Math. 575, 135 – 155 (2004).
- [7] H. Lange, S. Recillas, *Polarizations of Prym varieties of pairs of coverings*, Arch. der Mathem. 86, 111 – 120 (2006)
- [8] H. Lange, S. Recillas, *Prym varieties of pairs of coverings*, Advances in Geometry 4 (2004), 373 – 387.
- [9] D. Mumford, *Prym varieties I*, Contributions to analysis. Academic Press, 325 – 350 (1974).
- [10] G. Welters, *Recovering the curve data from a general Prym variety*, Am. J. Math. 109, 165 – 182 (1987)